

## LK Mathematik \* K12

### Übungsaufgaben zum natürlichen Logarithmus und zur Exponentialfunktion

Im Unterricht wurde für die Funktion  $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$  gezeigt:

$\ln(x) = \log_e x$ , d.h.  $f(x) = e^x$  und  $g(x) = \ln(x)$  sind Umkehrfunktionen zueinander und  $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

#### Aufgaben:

1. Lösen Sie die Gleichungen. Runden Sie gegebenenfalls auf 3 Dezimalstellen.

a)  $0,5 \cdot \ln(x^2) - \ln(x+1) + \ln(5) = \ln(2x)$

b)  $\log_{0,1}(2x) - \ln(e) = \lg(x)$

c)  $2e^{3x-4} = 5$

d)  $e^{2x} + e^{x+1} = 2e^x + 2e$

2. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den maximalen Definitionsbereich, alle Nullstellen, das Verhalten am Rand des Definitionsbereichs und alle Hoch- bzw. Tiefpunkte.

a)  $f(x) = \ln\left(\frac{8x}{9-x^2}\right)$

b)  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{4x-2}\right)$

c)  $f(x) = \ln(5x-4) - \ln(x^2+2)$

3. Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen  $G_f$  und  $G_g$ ?

$$f(x) = \ln(x^2 - 5) \quad ; \quad g(x) = \ln(x+7)$$

4. Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen zu

$$f(x) = \ln|2-x|$$

5. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

a)  $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

b)  $\int_1^2 \frac{3+4x}{5x} dx$

c)  $\int_1^2 \frac{x^3+2x}{x^2} dx$

d)  $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3+2x}{x^2} dx$

## Lösungen:

1. a)  $x = 1,5$     b)  $x = \frac{\sqrt{5}}{10} \approx 0,224$   
c)  $x = \frac{4 + \ln(2,5)}{3} \approx 1,639$     d)  $x = \ln(2) \approx 0,693$
2. a)  $D_f = ] -\infty ; -3[ \cup ] 0 ; 3[ ; \quad \text{NSt. } x_1 = -9 ; x_2 = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$   
 $f'(x) = \frac{9 + x^2}{x(9 - x^2)} > 0$  für alle  $x \in D_f$ , d.h. es gibt keine HOP bzw. TIP.
- b)  $D_f = ] 0,5 ; \infty[ ; \quad \text{NSt. } x_{1/2} = 2$  (doppelte Nullstelle)  
 $\lim_{x \rightarrow 0,5} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  und  $f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2 - x - 2)}{(4x - 2) \cdot (x^2 + 2)}$   
TIP (2 / 0)
- c)  $D_f = ] 0,8 ; \infty[ ; \quad \text{NSt. } x_1 = 2 ; x_2 = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow 0,8} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  und  $f'(x) = \frac{10 + 8x - 5x^2}{(5x - 4) \cdot (x^2 + 2)}$   
HOP ( $0,8 + 0,2\sqrt{66} / \dots$ )  $\approx ( 2,42 / 0,03)$

3. Zwei Schnittpunkte:  $S_1 ( 4 / \ln(11) )$  mit  $\varphi_1 \approx 30,8^\circ$  und  $S_2 ( -3 / \ln(4) )$  mit  $\varphi_2 \approx 70,3^\circ$

4. Verwenden Sie zur Kontrolle geeignete Software!

5. a)  $\int_1^e \frac{2}{x} dx = 2$   
b)  $\int_1^2 \frac{3 + 4x}{5x} dx = 0,8 + 0,6 \cdot \ln(2) \approx 1,22$   
c)  $\int_1^2 \frac{x^3 + 2x}{x^2} dx = 1,5 + \ln(4) \approx 2,89$   
d)  $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3 + 2x}{x^2} dx = -1,5 - \ln(4) \approx -2,89$