LK M K12 * Aufgaben zu Determinanten und linearen Gleichungssystemen

1. Zeigen Sie: $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)\cdot(a-c)\cdot(b-c)$

2. Für welche $x \in R$ gilt $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 1$

3. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

a)

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & x_1 & + x_2 & + 4x_3 & = & 6 \\ (2) & 3x_1 & & + 3x_3 & = & 2 \\ (3) & 2x_1 & + x_2 & + 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & x_1 & + 4x_2 & + 5x_3 & = & 1 \\ (2) & & + 2x_2 & + 5x_3 & = & 1 \\ (3) & x_1 & - 2x_2 & + 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & x_1 & + 3x_2 & + 2x_3 & = & 1 \\ (2) & 2x_1 & + 6x_2 & + 4x_3 & = & 3 \\ (3) & 2x_1 & + x_2 & - x_3 & = & 4 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & x_1 & - x_2 & & = & 1 \\ (2) & x_1 & - x_2 & + x_3 & = & 2 \\ (3) & x_1 & - x_2 & - x_3 & = & 0 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & x_1 & & + x_3 & = & 1 \\ (2) & & + x_2 & & = & 0 \\ (3) & & + x_2 & + x_3 & = & 1 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & & x_2 & & = & 1 \\ (2) & x_1 & & + x_3 & = & 0 \\ (3) & & x_2 & & = & 1 \end{array}$$

4. Für welche $a, b \in R$ ist das folgende LGS lösbar?

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & x_1 & - x_2 & & = & a \\ (2) & x_1 & & + x_3 & = & b \\ (3) & & x_2 & + x_3 & = & 1 \end{array}$$

5. a) Für welche $t \in R$ ist das homogene LGS (d.h. $b_1 = b_2 = b_3 = 0$) nichttrivial lösbar?

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & (2-t)\,x_1 & + 3x_2 & + 6x_3 & = & b_1 \\ (2) & 3x_1 & + (2-t)\,x_2 & - 6x_3 & = & b_2 \\ (3) & -6x_1 & -6x_2 & + (11-t)\,x_3 & = & b_3 \end{array}$$

b) Für welche $t \in R$ ist das LGS lösbar, wenn $b_1 = b_2 = 1$ und $b_3 = -2$ gilt?
Welche Lösungsmenge erhält man für $t = -1$?

6. Für welche Werte von r und $s \in R$ hat das LGS keine bzw. unendliche viele Lösungen?

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & 2x_1 & - x_2 & + x_3 & = & r-1 \\ (2) & 5x_1 & - 3x_2 & + r\,x_3 & = & s \\ (3) & x_1 & - r\,x_2 & - x_3 & = & 2 \end{array}$$

LK M K12 * Aufgaben zu Determinanten und linearen Gleichungssystemen * Lösungen

1. $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = a^2b + ac^2 + b^2c - c^2b - ca^2 - b^2a$ und

$(a-b)\cdot(a-c)\cdot(b-c) = (a^2 - ac - ba + bc)(b-c) = ... = a^2b + ac^2 + b^2c - c^2b - ca^2 - b^2a$

2. $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 1 \iff x^3 - x^2 - x + 1 = 1 \iff x\cdot(x^2 - x - 1) = 0 \iff$

$x_1 = 0\ ;\ x_{2/3} = \frac{1}{2}\cdot(1 \pm \sqrt{5})$

3. a) $L = \left\{\left(-\frac{5}{3} / -\frac{5}{3} / \frac{7}{3}\right)\right\}$ b) $L = \left\{\left(\frac{13}{12} / -\frac{13}{24} / \frac{5}{12}\right)\right\}$

c) $L = \{\ \}$

d) $L = \{(r / r-1 / 1) / r \in R\} = \{(s+1 / s / 1) / s \in R\}$

e) $L = \{(0 / 0 / 1)\}$

f) $L = \{(r / 1 / -r) / r \in R\} = \{(-s / 1 / s) / s \in R\}$

4. Das LGS ist lösbar, falls $1 + a = b$ gilt. In diesem Fall gibt es sogar unendlich viele Lösungen, nämlich $L = \{(b-r / 1-r / r) / r \in R\}$.
Für $1 + a \neq b$ hat das LGS keine Lösung!

5. a) $\det = \begin{vmatrix} (2-t) & 3 & 6 \\ 3 & (2-t) & -6 \\ -6 & -6 & (11-t) \end{vmatrix} = ... = (t-5)\cdot(t+1)\cdot(11-t)$

Für $\det = 0 \iff t_1 = -1\ ;\ t_2 = 5\ ;\ t_3 = 11$ ist das homogene LGS nichttrivial lösbar.

b) Für $t \in R \setminus \{-1\ ;\ 5\ ;\ 11\}$ ist das LGS eindeutig lösbar.

Für $t = 5$ bzw. $t = 11$ gilt $L = \{\ \}$ und für $t = -1$ gilt $L = \left\{\left(r / \frac{1}{3} - r / 0\right) / r \in R\right\}$.

6. $\det = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & r \\ 1 & -r & -1 \end{vmatrix} = 2r^2 - 6r + 4 = 2\cdot(r-1)\cdot(r-2)$

$\det = 0 \iff r_1 = 1\ ;\ r_2 = 2$

$r_1 = 1\ ;\ s = -4 \Rightarrow L = \{(4r / -2+3r / r) / r \in R\}$

$r_1 = 1\ ;\ s \neq -4 \Rightarrow L = \{\ \}$

$r_2 = 2\ ;\ s = 3 \Rightarrow L = \{(-r / -1-r / r) / r \in R\}$

$r_2 = 2\ ;\ s \neq 3 \Rightarrow L = \{\ \}$