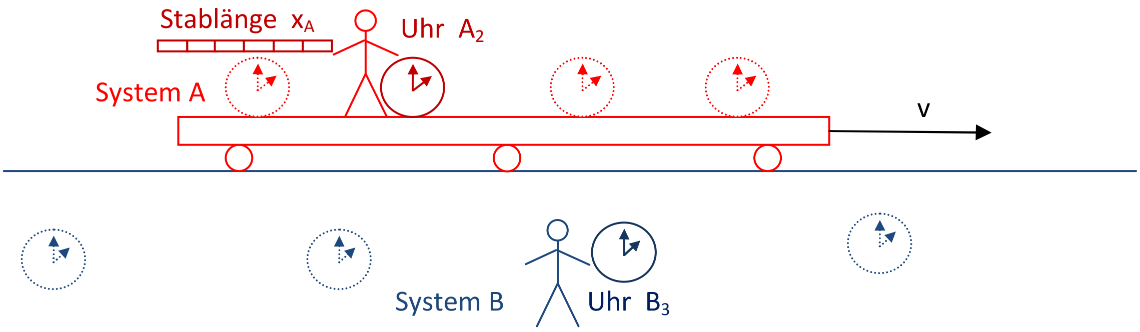
Physik * Q 11 * Relativitätstheorie

Zeitdilatation (Zeitdehnung) und Längenkontraktion

Bewegt sich eine Uhr mit der Geschwindigkeit v an einem Satz synchronisierter Uhren vorbei, so geht sie um den Faktor $\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ langsamer als diese synchronisierten Uhren (Zeitdilatation).



Die roten Uhren sind im System A synchronisiert, die blauen Uhren sind im System B synchronisiert.
Die <u>eine</u> rote Uhr A_2 geht langsamer als der Satz synchronisierter blauer Uhren.
[Ebenso gilt: Die <u>eine</u> blaue Uhr B_3 geht langsamer als der Satz synchronisierter roter Uhren.]

Das von der Uhr A_2 gemessene Zeitintervall Δt_A messen die Uhren von B als $\boxed{\Delta t_B = \dfrac{\Delta t_A}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}}$

(Hinweis: Die Geschwindigkeit v wird in beiden Systemen gleich gemessen.)

Der im System A ruhende Stab (mit der Eigenlänge x_A) bewegt sich in Längsrichtung mit der Geschwindigkeit v relativ zu B. Im System B misst man die Länge dieses Stabes um den Faktor $\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ verkürzt (Längenkontraktion).
Senkrecht zur Bewegungsrichtung tritt keine Längenkontraktion auf.

Die von A gemessene Ruhelänge x_A des Stabes misst B zu $\boxed{x_B = \sqrt{1 - v^2 / c^2} \cdot x_A}$

Myonen

In der obersten Schicht der Erdatmosphäre entstehen durch die Höhenstrahlung (meist sehr energiereiche Protonen) unter anderem Myonen in sehr großer Zahl. Myonen sind Elementarteilchen, die nur eine kurze Lebensdauer aufweisen und mit einer Halbwertszeit von 1,52 µs zerfallen.
(Myonen haben bis auf ihre Masse genau die Eigenschaften von Elektronen; die Masse eines Myons beträgt allerdings etwa das 207-fache der Elektronenmasse.)

Messungen an Myonen der Höhenstrahlung liefern z.B. folgende Werte:

In 20km Höhe über der Erdoberfläche werden ca. 10^{15} Myonen gebildet, die sich mit einer Geschwindigkeit von 0,995c Richtung Erdoberfläche bewegen.
An der Erdoberfläche treffen von diesen Myonen insgesamt noch $4{,}7 \cdot 10^{13}$ auf.

a) Zeigen Sie, dass nach klassischer Rechnung weniger als 100 Myonen auf der Erdoberfläche auftreffen sollten.

b) Bestätigen Sie mit Hilfe relativistischer Rechnung im Bezugsystem Erde die tatsächliche Anzahl der auf der Erdoberfläche auftreffenden Myonen.

c) Wie erklärt ein Beobachter, der sich mit den Myonen mitbewegt, den gesamten Vorgang? Bestätigen Sie auch in diesem System die Anzahl der auf der Erde auftreffenden Myonen.

Lösung der Myonen-Aufgabe

a) Für den Weg durch die Atmosphäre benötigen die Myonen eine Zeit von

$$\Delta t = \frac{20\,\mathrm{km}}{v} = \frac{20\cdot 10^3\,\mathrm{m}}{0{,}995\cdot 3{,}0\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 6{,}7\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} = \frac{6{,}7\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}}{1{,}52\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}\cdot T_{1/2} = 44\,T_{1/2}$$

Nach 44 Halbwertszeiten sind von den ursprünglich 10^{15} Myonen nur noch etwa $N = 10^{15}\cdot 2^{-44} = 57$ vorhanden.

b) Die Myonen bewegen sich relativ zur Erde mit der hohen Geschwindigkeit $v = 0{,}995c$. Für die 20 km durch die Erde benötigen die Myonen von der Erde aus gemessen die Zeit von $6{,}7\cdot 10^{-5}$ s, wegen der Zeitdilatation vergeht für die Myonen dabei allerdings nur die Zeitspanne $\Delta t_{Myon} = \sqrt{1-0{,}995^2}\ \cdot\ 6{,}7\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} = 6{,}7\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = \frac{6{,}7\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}{1{,}52\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}\cdot T_{1/2} = 4{,}4\,T_{1/2}$

Nach der Zeitspanne von 4,4 Halbwertszeiten sind von den ursprünglich 10^{15} Myonen also am Erdboden noch $N = 10^{15}\cdot 2^{-4{,}4} = 4{,}7\cdot 10^{13}$ vorhanden.

c) Relativ zu den Myonen bewegt sich die 20 km „dicke“ Atmosphäre mit der hohen Geschwindigkeit von 0,995c. Wegen der Längenkontraktion messen die Myonen für diese Wegstrecke von 20km nur die verkürzte Länge von $x_{Atmosphäre} = \sqrt{1-0{,}995^2}\ \cdot 20\,\mathrm{km} = 2{,}0\,\mathrm{km}$.

Für diese Wegstrecke von 2,0 km benötigen die Myonen eine Zeit von

$$\Delta t = \frac{2{,}0\,\mathrm{km}}{v} = \frac{2{,}0\cdot 10^3\,\mathrm{m}}{0{,}995\cdot 3{,}0\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 6{,}7\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = \frac{6{,}7\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}{1{,}52\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}\cdot T_{1/2} = 4{,}4\,T_{1/2}$$

und nach dieser Zeitspanne sind noch $N = 10^{15}\cdot 2^{-4{,}4} = 4{,}7\cdot 10^{13}$ Myonen vorhanden, die am Erdboden auftreffen.