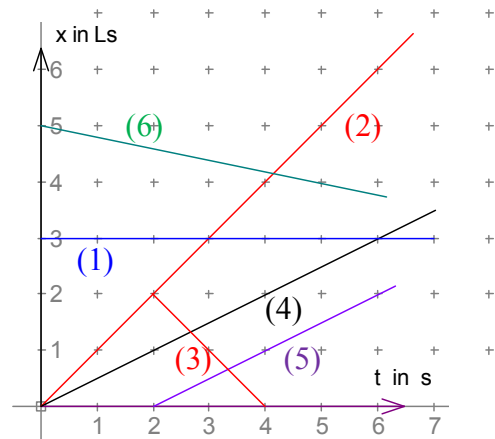


### 3. Minkowski-Diagramme

Geradengleichungen:

- (1)  $x = 3 \text{ Ls} = 3 \text{ c} \cdot \text{s}$
- (2)  $x = 1 \text{ c} \cdot t$
- (3)  $x = 4 \text{ c} \cdot \text{s} - 1 \text{ c} \cdot t$  (für  $2 \text{ s} \leq t \leq 4 \text{ s}$ )
- (4)  $x = 0,5 \text{ c} \cdot t$
- (5)  $x = 0,5 \text{ c} \cdot t - 1 \text{ c} \cdot \text{s}$
- (6)  $x = 5 \text{ c} \cdot \text{s} - 0,2 \text{ c} \cdot t$

(2) und (3) gehören zu Lichtsignalen.



### 4. Geschwindigkeitsradar

Zu zeigen:

$$\Delta \tau = \frac{c+v}{c-v} \cdot \Delta t \quad \text{und} \quad v = \frac{\Delta \tau - \Delta t}{\Delta \tau + \Delta t} \cdot c$$

Weltlinie B:  $x = v \cdot t$

erstes Lichtsignal:  $x = 1 \text{ c} \cdot t - 1 \text{ c} \cdot \Delta t$

erste Reflexion (Ereignis  $R_1$  zum Zeitpunkt  $t_1$ ):

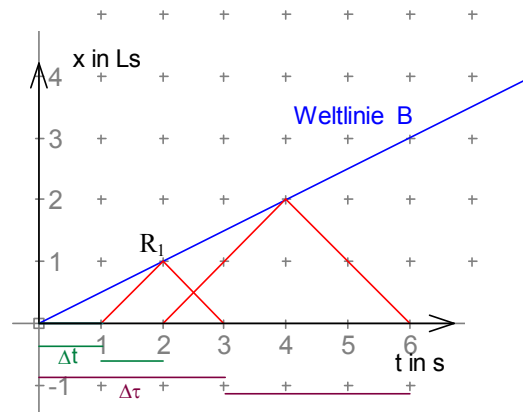
$$v \cdot t_1 = 1 \text{ c} \cdot t_1 - 1 \text{ c} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$c \cdot \Delta t = t_1 \cdot (c - v) \Rightarrow t_1 = \frac{c \cdot \Delta t}{c - v}$$

Rückkehr des Signals zum Zeitpunkt  $t_2 = \Delta \tau$ :

$$\Delta \tau = \Delta t + 2 \cdot (t_1 - \Delta t) = 2 \cdot t_1 - \Delta t = \frac{2 \cdot c \cdot \Delta t}{c - v} - \Delta t = \frac{2 \cdot c \cdot \Delta t - (c - v) \cdot \Delta t}{c - v} = \frac{(c + v) \cdot \Delta t}{c - v}$$

$$\text{also } \Delta \tau \cdot (c - v) = (c + v) \cdot \Delta t \Rightarrow c \cdot \Delta \tau - c \cdot \Delta t = \Delta \tau \cdot v + v \cdot \Delta t \Rightarrow v = c \cdot \frac{\Delta \tau - \Delta t}{\Delta \tau + \Delta t}$$

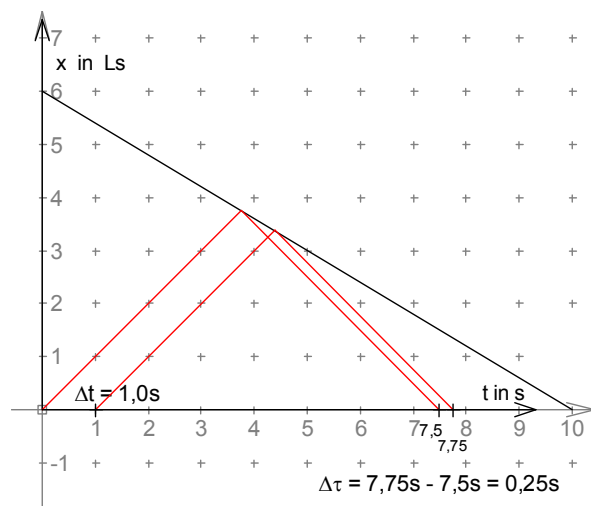


Aufgabe:

Für  $\Delta t = 1,0 \text{ s}$  gilt  $\Delta \tau = 0,25 \text{ s}$ , d.h.

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \frac{0,25}{1,0} = \frac{1}{4} \quad \text{und für } v = -0,6c$$

$$\frac{c+v}{c-v} = \frac{c-0,6c}{c-(-0,6c)} = \frac{0,4}{1,6} = \frac{1}{4}$$



## 5. Der k-Faktor

$$\Delta t' = k \cdot \Delta t \text{ und}$$

$$\Delta t = t_1 \text{ und } \Delta t' = t_1'$$

$$\text{und } \tau_1 = k \cdot t_1' \Rightarrow$$

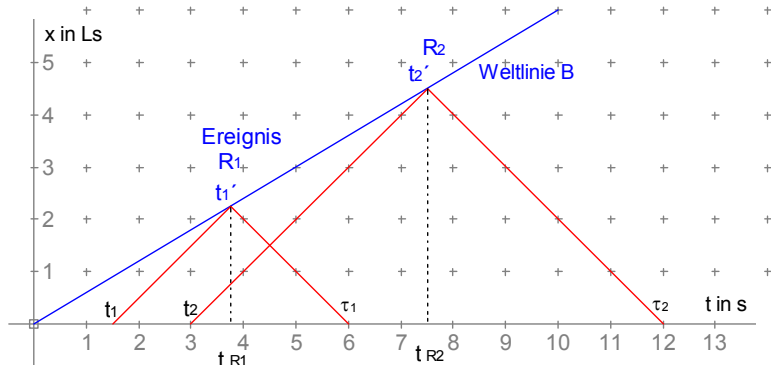
$$\tau_1 = k \cdot t_1' = k \cdot k \cdot t_1 \text{ d.h.}$$

$$\frac{\tau_1}{t_1} = k^2$$

Nach Kapitel 4. gilt

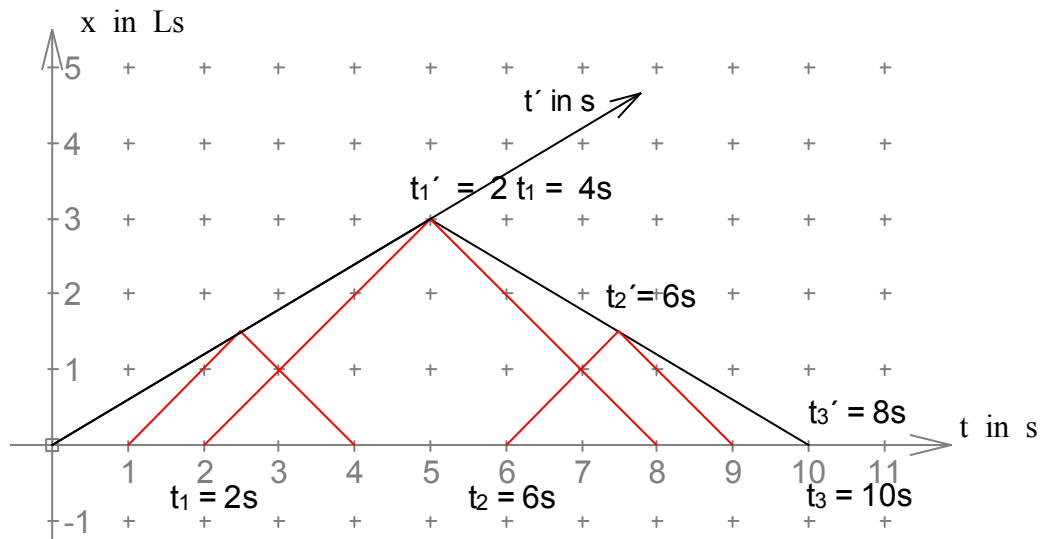
$$\frac{\tau_1}{t_1} = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \frac{c+v}{c-v} \text{ also}$$

$$k^2 = \frac{c+v}{c-v} \text{ also } k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$



## 6. Skalierung der t'-Achse und das Zwillingsparadoxon

Für  $v = 0,6c$  gilt  $k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \sqrt{\frac{1,6}{0,4}} = 2$



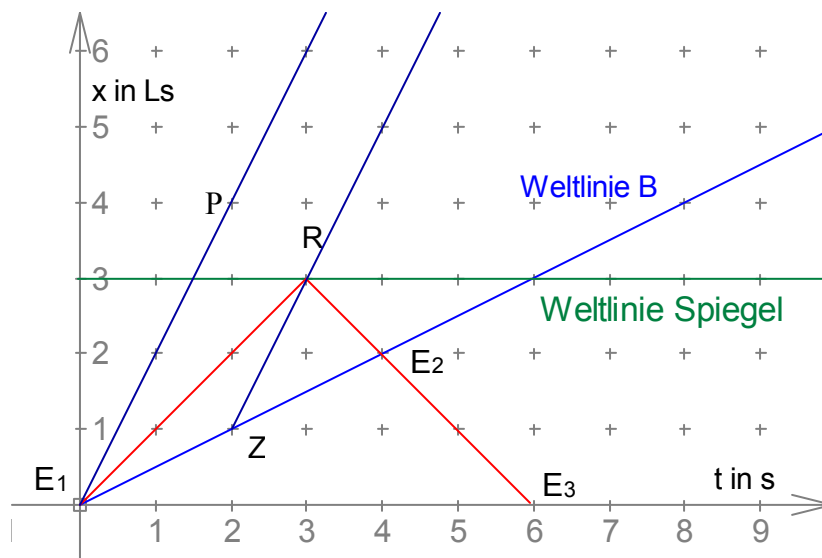
$$t_1' = k \cdot t_1 = 2 \cdot 2s = 4s$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 6s - 2s = 4s \text{ und } \Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{1}{k} \Delta t = \frac{4s}{2} = 2s \text{ also } t_2' = 4s + 2s = 6s$$

$$t_3' = t_2' + (t_2' - t_1') = 6s + 2s = 8s$$

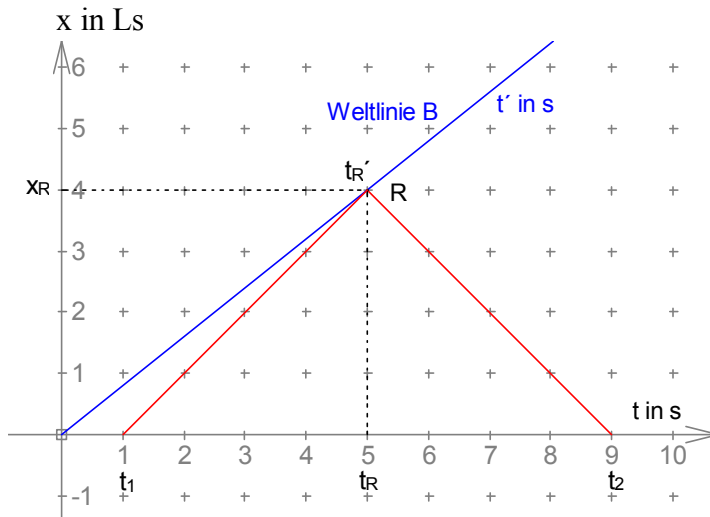
A und B treffen sich also nach der Zeitrechnung von A nach 10s, nach der Zeitrechnung von B aber schon nach 8s.

## 7. Das $t'$ - $x'$ -Koordinatensystem und die Relativität der Gleichzeitigkeit



- a) Die Reflexion des Lichtsignals (Ereignis R) findet für B genau zwischen den beiden Ereignissen  $E_1$  und  $E_2$  statt. Also finden R und Z für B zum gleichen Zeitpunkt statt. Für A dagegen findet R um genau eine Sekunde später als Z statt.
- b) Auf der Geraden RZ liegen alle Ereignisse, die für B gleichzeitig mit R und Z stattfinden. Auf der  $x'$ -Achse von B liegen alle Ereignisse, die für B gleichzeitig (zum Zeitpunkt 0s) stattfinden. Die  $x'$ -Achse liegt daher parallel zur Geraden RZ.
- c) Das Dreieck  $E_1E_2R$  ist bei R rechtwinklig (Lichtstrahlen!), d.h. R liegt auf dem Thaleskreis über  $E_1E_2$  mit dem Mittelpunkt Z.  
 Daher gilt:  $\alpha = \sphericalangle ZE_1R = \sphericalangle E_1RZ$  und  $\sphericalangle E_2ZR = 2\alpha$   
 Da die  $x'$ -Achse  $E_1P$  parallel zu ZR liegt gilt daher  
 $\sphericalangle ZE_1P = 2\alpha = \sphericalangle ZE_1R + \sphericalangle RE_2P = \alpha + \sphericalangle RE_2P$  also  $\sphericalangle RE_2P = \alpha = \sphericalangle ZE_1R$

## 8. Zeitdilatation und Längenkontraktion



### a) Zeitdilatation (Zeitdehnung)

$$t_{R'} = k \cdot t_1 \quad \text{und} \quad t_2 = k \cdot t_{R'} = k \cdot k \cdot t_1 = k^2 \cdot t_1$$

$$t_R = \frac{1}{2} \cdot (t_1 + t_2) = \frac{1}{2} \cdot (t_1 + k^2 t_1) = \frac{1}{2} \cdot (1 + k^2) \cdot t_1$$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{t_{R'}}{t_R} = \frac{k \cdot t_1}{0,5 \cdot (1 + k^2) \cdot t_1} = \frac{2k}{1 + k^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{1 + \frac{c+v}{c-v}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot (c-v)}{(c-v) + (c+v)} =$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{(c+v) \cdot (c-v)^2}{c-v}}}{2c} = \frac{\sqrt{(c+v) \cdot (c-v)}}{c} = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

### b) Längenkontraktion

$$x_{R'} = v \cdot t_{R'} = v \cdot k \cdot t_1 \quad \text{und} \quad x_R = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (k^2 - 1) \cdot t_1$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x_{R'}}{x_R} = \frac{v \cdot k \cdot t_1}{0,5 \cdot c \cdot (k^2 - 1) \cdot t_1} = \frac{2 \cdot v \cdot k}{c \cdot (k^2 - 1)} = \frac{2v}{c} \cdot \frac{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{\frac{c+v}{c-v} - \frac{c-v}{c-v}} = \frac{2v}{c} \cdot \frac{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{\frac{2v}{c-v}} =$$

$$\frac{2v}{c} \cdot \frac{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot (c-v)}{2v} = \frac{\sqrt{\frac{(c+v) \cdot (c-v)^2}{c-v}}}{c} = \frac{\sqrt{(c+v) \cdot (c-v)}}{c} = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

Aufgabe:

a) Die Wegstrecke von 10 Lj ist für den mit  $v$  reisenden Astronaut Pirx verkürzt.

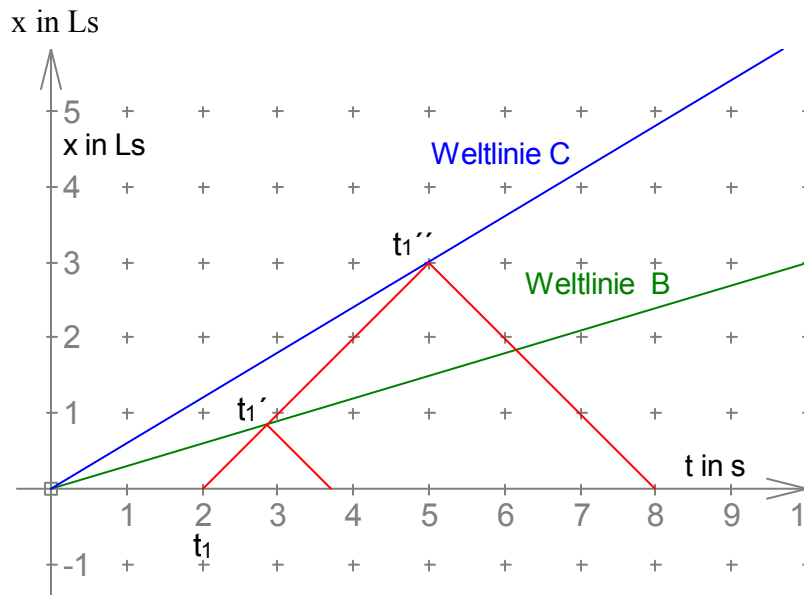
$$\text{Also gilt: } 10 \text{ Lj} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = v \cdot 2 \text{ Jahre} \Leftrightarrow 10c \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = 2v \Leftrightarrow 5 \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \beta \Leftrightarrow$$

$$25 \cdot (1 - \beta^2) = \beta^2 \Leftrightarrow 25 = 26\beta^2 \Leftrightarrow \frac{v}{c} = \beta = \sqrt{\frac{25}{26}} = 0,98058... \text{ also } v \approx 0,98c$$

b) Der „Tacho“ von Pirx zeigt  $10 \text{ Lj} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = 10 \text{ Lj} \cdot \sqrt{1 - (0,98058...)^2} \approx 0,275 \text{ Lj}$  an.



## 9. Einsteinaddition von Geschwindigkeiten



$$t_1' = k_1 \cdot t_1 \quad \text{und} \quad t_1'' = k_2 \cdot t_1 \quad \text{und} \quad t_1'' = k \cdot t_1' = k \cdot k_1 \cdot t_1 \Rightarrow k_2 \cdot t_1 = k \cdot k_1 \cdot t_1 \quad \text{also} \quad k = \frac{k_2}{k_1}$$

$$k = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \Rightarrow k^2 = \frac{c+u}{c-u} \Rightarrow k^2 c - k^2 u = c+u \Rightarrow k^2 c - c = u + k^2 u \Rightarrow$$

$$c(k^2 - 1) = u(1 + k^2) \Rightarrow u = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \cdot c \quad (*)$$

$$k^2 = \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\frac{c+v_2}{c-v_2}}{\frac{c+v_1}{c-v_1}} = \frac{(c+v_2) \cdot (c-v_1)}{(c+v_1) \cdot (c-v_2)} \quad \text{eingesetzt in } (*)$$

$$u = \frac{\frac{(c+v_2) \cdot (c-v_1)}{(c+v_1) \cdot (c-v_2)} - 1}{\frac{(c+v_2) \cdot (c-v_1)}{(c+v_1) \cdot (c-v_2)} + 1} \cdot c = \frac{\frac{(c+v_2) \cdot (c-v_1)}{(c+v_1) \cdot (c-v_2)} - \frac{(c+v_1) \cdot (c-v_2)}{(c+v_1) \cdot (c-v_2)}}{\frac{(c+v_2) \cdot (c-v_1)}{(c+v_1) \cdot (c-v_2)} + \frac{(c+v_1) \cdot (c-v_2)}{(c+v_1) \cdot (c-v_2)}} \cdot c =$$

$$\frac{(c+v_2) \cdot (c-v_1) - (c+v_1) \cdot (c-v_2)}{(c+v_2) \cdot (c-v_1) + (c+v_1) \cdot (c-v_2)} \cdot c = \frac{c^2 - cv_1 + cv_2 - v_2 v_1 - (c^2 - cv_2 + cv_1 - v_1 v_2)}{c^2 - cv_1 + cv_2 - v_2 v_1 + (c^2 - cv_2 + cv_1 - v_1 v_2)} \cdot c =$$

$$\frac{c^2 - cv_1 + cv_2 - v_2 v_1 - (c^2 - cv_2 + cv_1 - v_1 v_2)}{c^2 - cv_1 + cv_2 - v_2 v_1 + (c^2 - cv_2 + cv_1 - v_1 v_2)} \cdot c = \frac{2cv_2 - 2cv_1}{2c^2 - 2v_1 v_2} \cdot c = \frac{c^2 \cdot (v_2 - v_1)}{c^2 - v_1 v_2} =$$

$$\frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad \text{also} \quad u = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \Rightarrow u - \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot u}{c^2} = v_2 - v_1 \Rightarrow u + v_1 = v_2 + \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot u}{c^2} \Rightarrow$$

$$u + v_1 = v_2 \cdot \left(1 + \frac{v_1 \cdot u}{c^2}\right) \Rightarrow v_2 = \frac{u + v_1}{1 + \frac{v_1 \cdot u}{c^2}}$$

## Aufgaben zum Kapitel 9

1. C bewegt sich relativ zu A mit  $v = v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} =$

$$\frac{0,5c + 0,8c}{1 + 0,5 \cdot 0,8} = \frac{1,3c}{1,4} = 0,9285\dots c \approx 0,93c .$$

2. C bewegt sich relativ zu A mit  $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}$  wobei  $v_1 = 0,8c$  und  $v_2 = -0,5c$  gilt.

$$\text{Also } v = \frac{0,8c - 0,5c}{1 - 0,8 \cdot 0,5} = \frac{0,3c}{0,6} = 0,50c$$

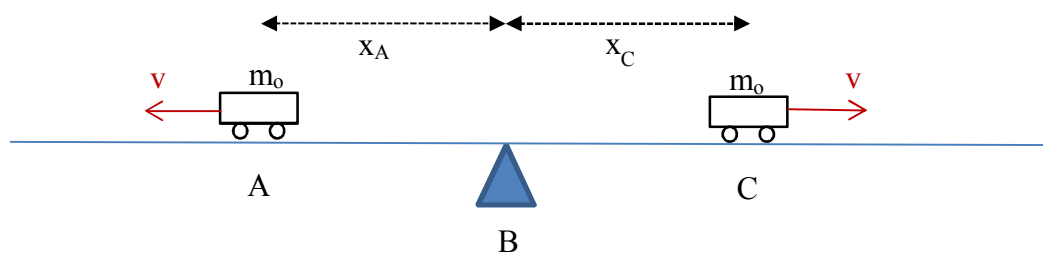
3. In Vorwärtsrichtung:  $v_v = \frac{v_1 + c}{1 + \frac{v_1 \cdot c}{c^2}} = \frac{0,6c + c}{1 + 0,6 \cdot 1} = \frac{1,6c}{1,6} = c$

$$\text{In Rückwärtsrichtung: } v_R = \frac{v_1 - c}{1 - \frac{v_1 \cdot c}{c^2}} = \frac{0,6c - c}{1 - 0,6 \cdot 1} = \frac{-0,4c}{0,4} = -c$$

4. Die Rakete schlägt mit der Geschwindigkeit  $u$  ein:  $u = \frac{0,6c - 0,95c}{1 - 0,6 \cdot 0,95} = \frac{-0,35c}{0,43}$

$$= -\frac{35}{43}c = 0,813\dots c \approx 0,81c$$

## 10. Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse



Hebelgesetz:  $m_0 \cdot x_A = m \cdot x_C \Leftrightarrow m_0 \cdot v \cdot t = m \cdot \left( \frac{2v}{1+v^2/c^2} \cdot t - v \cdot t \right)$  zu jedem Zeitpunkt  $t$ .

$$m_0 \cdot v \cdot t = m \cdot \left( \frac{2v}{1+v^2/c^2} \cdot t - v \cdot t \right) \Leftrightarrow m_0 \cdot v = m \cdot \left( \frac{2v}{1+v^2/c^2} - v \right) \Leftrightarrow$$

$$m_0 \cdot v = m \cdot \left( \frac{2v \cdot c^2}{c^2 + v^2} - v \right) \Leftrightarrow m_0 \cdot v = m \cdot \frac{2v \cdot c^2 - v \cdot (c^2 + v^2)}{c^2 + v^2} \Leftrightarrow m_0 \cdot v = m \cdot \frac{v \cdot c^2 - v^3}{c^2 + v^2} \Leftrightarrow$$

$$m_0 = m \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2} \Leftrightarrow m = m_0 \cdot \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}$$

$$v_C = v \oplus v = \frac{v + v}{1 + \frac{v \cdot v}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2vc^2}{c^2 + v^2} \quad \text{also} \quad \frac{v_C}{c} = \frac{2vc}{c^2 + v^2} \quad (*) \quad \text{und "trickreich"}$$

$$\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2 + v^2}{\sqrt{(c^2 - v^2)^2}} = \frac{c^2 + v^2}{\sqrt{c^4 - 2c^2v^2 + v^4 + 4c^2v^2 - 4c^2v^2}} = \frac{c^2 + v^2}{\sqrt{c^4 + 2c^2v^2 + v^4 - 4c^2v^2}} =$$

$$\frac{c^2 + v^2}{\sqrt{c^4 + 2c^2v^2 + v^4 - 4c^2v^2}} = \frac{c^2 + v^2}{\sqrt{(c^2 + v^2)^2 - 4c^2v^2}} = \frac{1}{\frac{1}{c^2 + v^2} \cdot \sqrt{(c^2 + v^2)^2 - 4c^2v^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(c^2 + v^2)^2 - 4c^2v^2}{(c^2 + v^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4c^2v^2}{(c^2 + v^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{2cv}{c^2 + v^2} \right)^2}} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{v_C}{c} \right)^2}}$$

Aufgaben:

a)  $m(v) = 1,10 \cdot m_0 \Leftrightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,10 m_0 \Leftrightarrow \frac{1}{1,10} = \sqrt{1 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1,1^2} = 1 - \beta^2 \Leftrightarrow$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{1,21} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{1,21}} = \sqrt{\frac{1,21 - 1}{1,21}} = \sqrt{\frac{0,21}{1,21}} = 0,4165... \quad \text{also} \quad v \approx 0,42c$$

b)  $m(v) = 2 \cdot m_0 \Leftrightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2 m_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2} = 1 - \beta^2 \Leftrightarrow$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660... \quad \text{also} \quad v \approx 0,87c$$

c)  $m(v) = 10 \cdot m_0 \Leftrightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 10 m_0 \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \sqrt{1 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{1}{10^2} = 1 - \beta^2 \Leftrightarrow$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{99}{100}} = 0,9949... \quad \text{also} \quad v \approx 0,99c$$

## 11. Kinetische Energie und $E = mc^2$

Aufgaben:

$$\text{a) } E = m \cdot c^2 = 1,0 \text{ kg} \cdot \left(3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 9,0 \cdot 10^{16} \text{ J} = 9,0 \cdot 10^{13} \text{ kW}_S = \frac{9,0 \cdot 10^{13} \text{ kWh}}{3600} = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ kWh}$$

Bei einem „Wert“ von ca. 0,25€ pro kWh entspricht das etwa 6,25 Milliarden Euro.

$$\text{b) } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200 \text{ kg} \cdot \left(\frac{180 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ J}$$

da 1,0kg einer Energie von  $9,0 \cdot 10^{16} \text{ J}$  entsprechen, entspricht diese kinetische

Energie von  $1,5 \cdot 10^6 \text{ J}$  einer Massenzunahme von  $\frac{1,5 \cdot 10^6 \text{ J}}{9,0 \cdot 10^{16} \text{ J}} \text{ kg} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-10} \text{ kg} \approx 1,7 \cdot 10^{-11} \text{ kg}$ .

$$\text{c) } 3,82 \cdot 10^{26} \frac{\text{J}}{\text{s}} \hat{=} \frac{3,82 \cdot 10^{26} \text{ J}}{9,0 \cdot 10^{16} \text{ J}} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 4,2 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 4,2 \text{ Millionen Tonnen pro Sekunde}$$

## Galaktische Lügengeschichte

Das Geschoss bewegt sich relativ zur Galaxis mit der Geschwindigkeit

$$v = v_{\text{Enterpr}} \oplus v_{\text{Geschoss rel. Enterpr.}} = \frac{0,20c + 0,70c}{1 + \frac{0,20c \cdot 0,70c}{c^2}} = \frac{0,90c}{1,14} = \frac{15}{19}c = 0,789...c < 0,80c$$

Das Geschoss kann damit die feindliche Rakete nicht einholen.  
Es handelt sich um eine Lügengeschichte!

