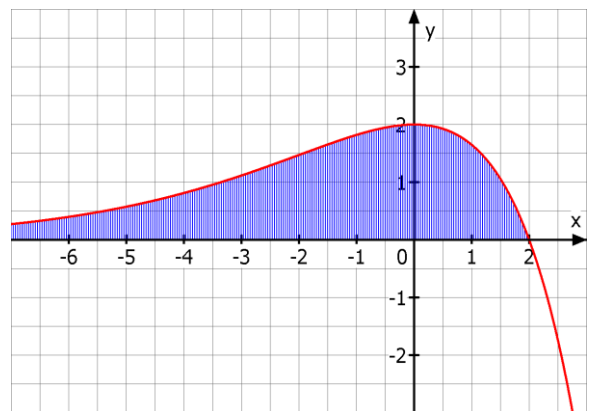


Q12 * Mathematik * Übungsaufgaben zur 1. Klausur

1. Gegeben ist die Kurvenschar mit $f_k(x) = (k-x) \cdot e^{0,5x}$ mit $k > 0$.

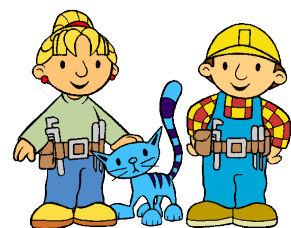
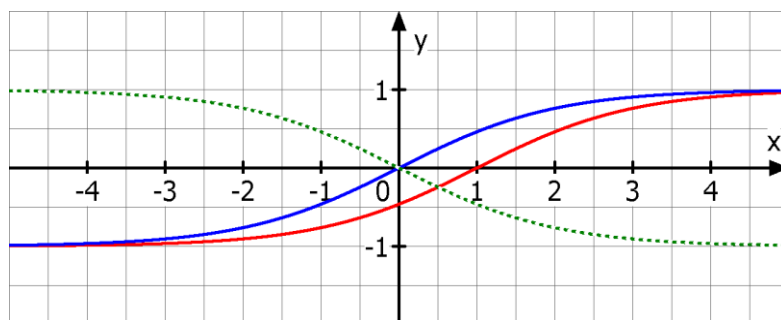
Der Graph von f_k wird im Folgenden mit G_k bezeichnet.

- Bestimmen Sie alle Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k .
Bestimmen Sie das Verhalten von $f_k(x)$ an den Grenzen des Definitionsbereichs. (Es darf $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^x = 0^+$ (für $n \in \mathbb{N}$) verwendet werden.)
- Zeigen Sie, dass G_k keinen Tiefpunkt aber genau einen Hochpunkt besitzt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes.
Auf welcher Kurve liegen alle Hochpunkte der Schar?
- Zeigen Sie, dass G_k genau einen Wendepunkt hat.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte der Schar?
- Der Graph G_k schließt mit der x -Achse eine sich ins (negativ) Unendliche erstreckende Fläche ein.
Bestimmen Sie den endlichen Inhalt A_k dieser Fläche in Abhängigkeit von k .
(Hinweis: $F_k(x) = (ax+b) \cdot e^{0,5x}$ ist für passendes a und b eine Stammfkt.)
- Das Bild zeigt einen Graphen der Schar.
Welchen Wert hat das zugehörige k ?
Wie groß ist der Inhalt der schraffierten Fläche?



2. Gegeben ist die Kurvenschar mit $g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x + k}$ mit $k > 0$.

- Bestimmen Sie alle Nullstellen von g_k und untersuchen Sie das Verhalten von $g_k(x)$ an den Stellen des Definitionsbereichs.
- Begründen Sie, dass alle Funktionen der Schar streng monoton steigend sind.
- Zeigen Sie, dass alle Funktionen der Schar genau einen Wendepunkt besitzen.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von k .
Auf welcher Kurve liegen diese Wendepunkte der Schar?
- Das Bild zeigt zwei Graphen der Schar und gestrichelt eine weitere Kurve.
Geben Sie die zugehörigen k -Werte zum blauen und roten Graphen an!
Wie lautet die Funktionsgleichung zur gestrichelten Kurve?



Q12 * Mathematik m6 * Übungsaufgaben zur 1. Klausur * Lösungen

1. a) NSt.: $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = k$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = "-\infty \cdot \infty" = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [k \cdot e^{0,5x} - (x^2 \cdot e^x)^{0,5}] = "0 - 0^{0,5}" = 0$$

b) $f_k'(x) = (0,5k - 1 - 0,5x) \cdot e^{0,5x}$ und $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = k - 2 ; y_2 = 2 \cdot e^{0,5k-1}$
 $f_k'(x)$ ändert bei x_2 das Vorzeichen von + auf - , also HOP(x_2/y_2).

Kurve der HOP: $h(x) = 2 \cdot e^{0,5x}$ mit $x \in]-2; \infty[$

c) $f_k''(x) = (0,25k - 1 - 0,25x) \cdot e^{0,5x}$ und $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = k - 4 ; y_3 = 4 \cdot e^{0,5k-2}$

Kurve der WP: $w(x) = 4 \cdot e^{0,5x}$ mit $x \in]-4; \infty[$

d) Der Probeansatz liefert durch Koeffizientenvergleich die Stammfunktion

$$F_k(x) = (4 + 2k - 2x) \cdot e^{0,5x} \quad \text{und damit}$$

$$A_k = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^k f_k(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [(4 + 2k - 2x) \cdot e^{0,5x}]_a^k = 4 \cdot e^{0,5k} - 0 = 4 \cdot e^{0,5k}$$

e) Das Bild zeigt den Graphen zu $k = 2$ (Vgl. Nst.)

$$A_2 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 f_2(x) dx = 4 \cdot e^{0,5 \cdot 2} = 4e$$

2. a) NSt.: $g_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = k \Leftrightarrow x_1 = \ln k$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - k}{e^x + k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{k}{e^x}}{1 + \frac{k}{e^x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - k}{e^x + k} = \frac{0-k}{0+k} = -1$$

$$b) g_k'(x) = \frac{2ke^x}{(e^x + k)^2} \quad \text{und} \quad g_k''(x) = \frac{2ke^x \cdot (k - e^x)}{(e^x + k)^3}$$

$$g_k'(x) = \frac{2ke^x}{(e^x + k)^2} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \Rightarrow g \text{ ist streng monoton wachsend.}$$

c) $g_k''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ln k$ wg. Vorzeichenwechsel WP ($\ln k ; 0$)

Alle WP liegen auf der x-Achse.

d) Blauer Graph: $k = 1$ wegen NSt. $x_1 = \ln k = 0$

Roter Graph: $k = e$ wegen NSt. $x_1 = \ln k = 1$

$$\text{Gestrichelter Graph: } f(x) = -g_1(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

