

Q12 * Mathematik * Streifenmethode

Für die folgenden Aufgaben dürfen die angegebenen Formeln verwendet werden.

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Streifenmethode die folgenden bestimmten Integrale. Sie dürfen dabei nur den Grenzwert der Ober- bzw. der Untersumme bestimmen. Kennzeichnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt in einem passenden Diagramm. In welchen Fällen ist die Berechnung des bestimmten Integrals auch ohne Streifenmethode möglich?

1. $A_1 = \int_0^3 0,5x \, dx$

2. $A_2 = \int_0^3 1 + 0,5x \, dx$

3. $A_3 = \int_0^3 0,25x^2 \, dx$

4. $A_4 = \int_2^3 0,25x^2 \, dx$

Für Experten:

Zeigen Sie mit Hilfe der Streifenmethode die Gültigkeit folgender Formeln ($0 < a < b$):

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3} \quad \text{und} \quad \int_a^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$



Lohnenswerte Aufgaben aus dem Lehrbuch:

S. 14 / Nr. 2, 3, 4a,b

S. 15 / Nr. 8, 10

Q12 * Mathematik * Streifenmethode * Lösungen



1. $A_1 = \int_0^3 0,5x \, dx$; $\Delta x = \frac{3}{n}$; $x_0 = 0$; $x_i = \Delta x \cdot i$; $x_n = 3$

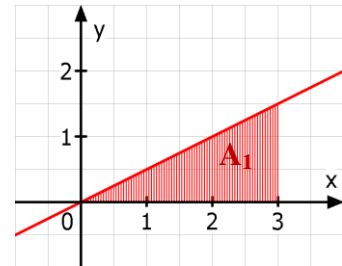
Obersumme: $O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n) =$

$$\Delta x \cdot (0,5 \cdot \Delta x \cdot 1 + \dots + 0,5 \cdot \Delta x \cdot n) = 0,5 \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot (1 + 2 + \dots + n) = 0,5 \cdot \frac{3 \cdot 3}{n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} =$$

$$0,5 \cdot \frac{3 \cdot 3}{n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{n^2 + n}{n^2} = \frac{9}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{9}{4} \cdot (1 + 0) = \frac{9}{4}$$

A_1 lässt sich auch als Dreiecksfläche einfacher berechnen:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot (3 - 0) \cdot 1,5 = 2,25 = \frac{9}{4}$$



2. $A_2 = \int_0^3 1 + 0,5x \, dx$; $\Delta x = \frac{3}{n}$; $x_0 = 0$; $x_i = \Delta x \cdot i$; $x_n = 3$

Obersumme: $O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n) =$

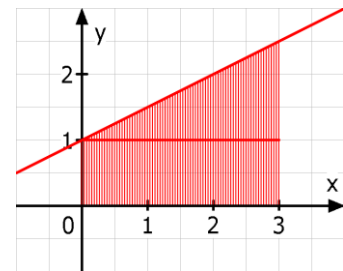
$$\Delta x \cdot ((1 + 0,5 \cdot \Delta x \cdot 1) + \dots + (1 + 0,5 \cdot \Delta x \cdot n)) = n \cdot \Delta x + 0,5 \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot (1 + 2 + \dots + n) =$$

$$n \cdot \frac{3}{n} + 0,5 \cdot \frac{3 \cdot 3}{n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{n^2 + n}{n^2} = 3 + \frac{9}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) ;$$

$$A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 + \frac{9}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = 3 + \frac{9}{4} \cdot (1 + 0) = \frac{21}{4}$$

A_2 lässt sich auch einfacher berechnen (siehe Bild):

$$A_2 = 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 = 5,25 = \frac{21}{4}$$



3. $A_3 = \int_0^3 0,25x^2 \, dx$; $\Delta x = \frac{3}{n}$; $x_0 = 0$; $x_i = \Delta x \cdot i$; $x_n = 3$

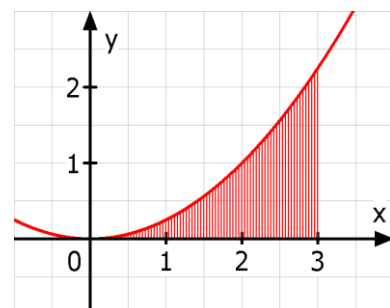
Obersumme: $O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n) =$

$$\Delta x \cdot (0,25 \cdot (\Delta x \cdot 1)^2 + \dots + 0,25 \cdot (\Delta x \cdot n)^2) = 0,25 \cdot \Delta x \cdot (\Delta x)^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) =$$

$$0,25 \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{n \cdot n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{9}{8} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$A_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{8} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{9}{8} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{9}{4}$$

A_3 lässt sich nur mit Hilfe der Streifenmethode berechnen.



$$4. \quad A_4 = \int_2^3 0,25x^2 dx; \quad \Delta x = \frac{3-2}{n} = \frac{1}{n}; \quad x_0 = 2; \quad x_i = 2 + \Delta x \cdot i = 2 + \frac{1}{n} \cdot i; \quad x_n = 3$$

$$\text{Obersumme: } O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n) =$$

$$\Delta x \cdot ((0,25 \cdot (2 + \frac{1}{n} \cdot 1)^2) + \dots + (0,25 \cdot (2 + \frac{1}{n} \cdot n)^2)) =$$

$$\Delta x \cdot 0,25 [(4 + \frac{4}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n^2} \cdot 1^2) + (4 + \frac{4}{n} \cdot 2 + \frac{1}{n^2} \cdot 2^2) \dots + (4 + \frac{4}{n} \cdot n + \frac{1}{n^2} \cdot n^2)] =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4} [n \cdot 4 + \frac{4}{n} \cdot (1+2+\dots+n) + \frac{1}{n^2} \cdot (1^2+2^2+\dots+n^2)] =$$

$$1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{1}{4 \cdot n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = 1 + \frac{n^2+n}{2n^2} + \frac{2n^3+3n^2+n}{4 \cdot n^3 \cdot 6}$$

$$A_4 = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \frac{n^2+n}{2n^2} + \frac{2n^3+3n^2+n}{4 \cdot n^3 \cdot 6}] =$$

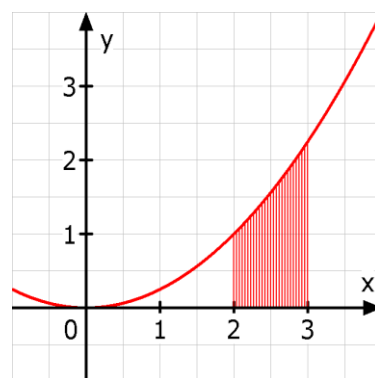
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4 \cdot 6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{19}{12}$$

Etwas einfacher geht es unter

Verwendung von A_3 :

$$A_4 = \int_2^3 0,25x^2 dx = \int_0^3 0,25x^2 dx - \int_0^2 0,25x^2 dx =$$

$$\frac{9}{4} - \lim_{n \rightarrow \infty} 0,25 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{n \cdot n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{9}{4} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{19}{12}$$



Expertenaufgabe:

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}; \quad \Delta x = \frac{b}{n}; \quad x_0 = 0, \quad x_i = \Delta x \cdot i = \frac{b}{n} \cdot i, \quad x_n = \Delta x \cdot n = \frac{b}{n} \cdot n = b$$

$$\text{Obersumme } O_n = \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \dots + \Delta x \cdot f(x_n) =$$

$$\Delta x \cdot [(\frac{b}{n} \cdot 1)^2 + (\frac{b}{n} \cdot 2)^2 + \dots + (\frac{b}{n} \cdot n)^2] = \frac{b}{n} \cdot (\frac{b}{n})^2 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] =$$

$$\frac{b}{n} \cdot (\frac{b}{n})^2 \cdot [\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}] = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{b^3}{6} \cdot [2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}]$$

$$\text{Und damit } \int_0^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \cdot [2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}] = \frac{b^3}{6} \cdot [2 + 0 + 0] = \frac{b^3}{3}$$

$$\int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$\text{Z.B. } \int_1^2 x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

