

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung



1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\int_1^3 0,5x + 2 \, dx$

b) $\int_3^1 2 + 0,5x \, dx$

c) $\int_0^4 x^2 + 2x \, dx$

d) $\int_1^2 5 - \frac{2}{x^2} \, dx$

e) $\int_0^3 \sqrt{x} \, dx$

f) $\int_1^2 (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x} \, dx$

2. Bestimmen Sie die beiden folgenden Integralfunktionen:

$$I_1(x) = \int_1^x t^2 - 2 \, dt \quad \text{und} \quad I_{-1}(x) = \int_{-1}^x t^2 - 2 \, dt$$

3. Vorsicht! Was halten Sie von folgenden Integralen?

$$\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2} \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{-1}^2 \frac{3}{x^2} \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_1^2 \frac{3}{x^2} \, dx$$

4. Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die Gleichung erfüllt ist.
Deuten Sie das Ergebnis jeweils geometrisch!

a) $\int_{-k}^k 1 - x^2 \, dx = 0$

b) $\int_{-k}^k 1 - x^2 \, dx = \frac{4}{3}$

5. Für Experten zum Tüfteln:

Berechnen Sie das bestimmte Integral. Denken Sie dabei an den HDI.

a) $\int_0^3 \sqrt{2x+3} \, dx$

b) $\int_0^3 6x \cdot \sqrt{x^2+3} \, dx$



Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung * Lösungen



$$1. a) \int_1^3 0,5x + 2 \, dx = \left[\frac{0,5 \cdot x^2}{2} + 2x \right]_1^3 = \left(\frac{9}{4} + 6 \right) - \left(\frac{1}{4} + 2 \right) = 6$$

$$b) \int_3^1 0,5x + 2 \, dx = \left[\frac{0,5 \cdot x^2}{2} + 2x \right]_3^1 = \left(\frac{1}{4} + 2 \right) - \left(\frac{9}{4} + 6 \right) = -6$$

$$c) \int_0^4 x^2 + 2x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^4 = \frac{64}{3} + 16 - 0 = \frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$$

$$d) \int_1^2 5 - \frac{2}{x^2} \, dx = \left[5x + \frac{2}{x} \right]_1^2 = \left(10 + \frac{2}{2} \right) - \left(5 + 2 \right) = 4$$

$$e) \int_0^3 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{27} - 0 = 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$f) \int_1^2 (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x} \, dx = \int_1^2 x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \left(\frac{16\sqrt{2}}{7} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{3} \right) = \frac{76\sqrt{2} - 20}{21}$$

$$2. I_1(x) = \int_1^x t^2 - 2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t \right]_1^x = \frac{x^3}{3} - 2x - \left(\frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{5}{3}$$

$$I_{-1}(x) = \int_{-1}^x t^2 - 2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t \right]_{-1}^x = \frac{x^3}{3} - 2x - \left(-\frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{5}{3}$$

$$3. \int_{-1}^2 \frac{3}{x^2} \, dx \text{ existiert nicht, denn man kann nicht über die Definitionslücke bei } x_1 = 0$$

hinweg integrieren!

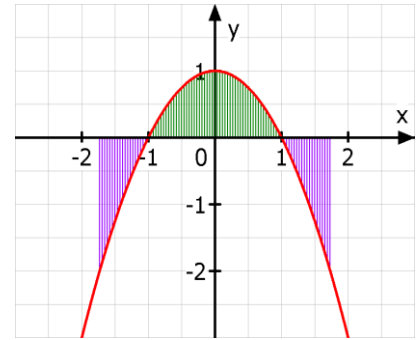
$$\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2} \, dx = \left[-\frac{3}{x} \right]_{-1}^{-2} = \frac{3}{2} - 3 = -1,5 \quad \text{und} \quad \int_1^2 \frac{3}{x^2} \, dx = \left[-\frac{3}{x} \right]_1^2 = -\frac{3}{2} + 3 = 1,5$$

$$4. a) \int_{-k}^k 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-k}^k = \frac{2k \cdot (3 - k^2)}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$\int_{-k}^k 1 - x^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{2k \cdot (3 - k^2)}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_1 = 0 \quad \text{oder} \quad k_{2/3} = \pm \sqrt{3}$$

Lila und grün gefärbte Flächen haben gleichen Inhalt!



$$b) \int_{-k}^k 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-k}^k = \frac{2k \cdot (3 - k^2)}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$\int_{-k}^k 1 - x^2 dx = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2k \cdot (3 - k^2)}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

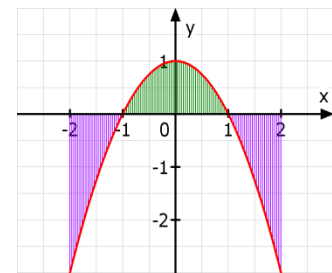
$$k \cdot (3 - k^2) = 2 \Leftrightarrow k^3 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{durch Faktorisieren: } k^3 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

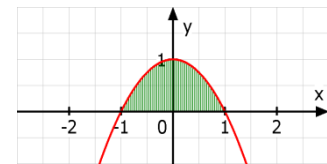
$$(k - 1) \cdot (k^2 + k - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_1 = 1 \quad \text{oder} \quad k_{2/3} = \frac{1}{2} \cdot (-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}) = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \text{d.h.}$$

$$k_2 = -2 \quad \text{und} \quad k_3 = k_1 = 1$$



Lila Fläche um $\frac{4}{3}$ größer als grüne!



Grüne Fläche hat den Inhalt $\frac{4}{3}$.

5. Alle Stammfunktionen findet man durch Probieren!

$$a) \int_0^3 \sqrt{2x+3} dx = \left[\frac{1}{3} \cdot (2x+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 9 - \sqrt{3}$$

$$b) \int_0^3 6x \cdot \sqrt{x^2+3} dx = \left[2 \cdot (x^2+3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{12} - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 42 \cdot \sqrt{3}$$

