Q12 * Mathematik m1 * Lösungen zu Ausfgaben aus dem Buch

S. 54/17 $\quad f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

Soll Wendepunkt mit waagrechter Tangente haben.

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6x + 2b$

WP: $\quad f''(x) = 0 \iff 6x = -2b \iff x_{WP} = -\frac{b}{3}$

Es muss gelten: $\quad f'(x_{WP}) = 0 \iff 3 \cdot \frac{b^2}{9} + 2b \cdot \left(-\frac{b}{3}\right) + c = 0$

$\iff \frac{b^2}{3} - \frac{2}{3}b^2 + c = 0 \iff -\frac{1}{3}b^2 + c = 0$

$\iff b^2 = 3c$

S. 54/20 $\quad f_a(x) = x^3 - ax^2 + 1$

a) $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax \qquad f_a''(x) = 6x - 2a$

$f_a'(x) = 0 \iff x(3x - 2a) = 0 \iff x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{2}{3}a$

$f_a''(0) = -2a \Rightarrow (0/1)$ ist HOP für $a > 0$

$(0/1)$ ist TIP für $a < 0$

$f_a''\left(\frac{2}{3}a\right) = 4a - 2a = 2a \Rightarrow \left(\frac{2}{3}a / 1 - \frac{4}{27}a^3\right)$ ist TIP für $a > 0$

$\left(\frac{2}{3}a / 1 - \frac{4}{27}a^3\right)$ ist HOP für $a < 0$

$f_a\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{8}{27}a^3 - \frac{4}{9}a^3 + 1 =$

$= 1 - \frac{4}{27}a^3$

WP: $\quad f_a''(x) = 0 \iff 6x - 2a = 0 \iff x_3 = \frac{1}{3}a \qquad$ ($f_a''(x)$ ändert bei x_3 Vorz.)

$y_4 = f_a\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{9}a^3 + 1 = 1 - \frac{2}{27}a^3$

$WP\left(\frac{1}{3}a / 1 - \frac{2}{27}a^3\right)$ für alle $a \in \mathbb{R}$

i) Ortslinie der TIP: $\quad y_2 = 1 - \frac{4}{27}a^3$ und $x_2 = \frac{2}{3}a$ mit $a > 0$

$a = \frac{3}{2}x; \quad y = 1 - \frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8}x^3 = 1 - \frac{1}{2}x^3$

TIP: $\quad t(x) = 1 - \frac{1}{2}x^3$ mit $x > 0$

ii) Ortslinie HOP: $\quad h(x) = 1 - \frac{1}{2}x^3$ mit $x < 0$

iii) Ortslinie WP: $\quad y_3 = 1 - \frac{2}{27}a^3$ und $x_3 = \frac{1}{3}a$ mit $a \in \mathbb{R}$

$a = 3x_3$ in $y_3 = 1 - \frac{2}{27} \cdot 27x_3^3 = 1 - 2x_3^3$

$w(x) = 1 - 2x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$

S. 54/20 b, Wendetangente soll durch Ursprung gehen! $a_0 = ?$

Steigung der Wendetangente: $m = f'(\frac{1}{3}a) = 3 \cdot \frac{a^2}{9} - 2a \cdot \frac{1}{3}a$

$m = -\frac{1}{3}a^2$

$(\frac{1}{3}a / 1 - \frac{2}{27}a^3)$ eingesetzt in $y = -\frac{1}{3}a^2 x + t$

$1 - \frac{2}{27}a^3 = -\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{3}a + t \Rightarrow t = 1 + \frac{1}{27}a^3$

Wendetangente geht durch (0/0), falls $t = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{27}a^3 = -1 \Rightarrow a^3 = -27 \Rightarrow a_0 = -\sqrt[3]{27} = -3$

20 c, $WP(\frac{1}{3} \cdot (-3) / 1 - \frac{2}{27} \cdot (-3)^3) = (-1/3)$ für $a_0 = -3$

$HOP(\frac{2}{3} \cdot (-3) / 1 - \frac{4}{27} \cdot (-3)^3) = (-2/5)$ für $a_0 = -3$

$TIP(0/1)$ für $a_0 = -3$

20 d, $A = \int_{-2}^{-1} f_{-3}(x)\,dx =$

$= \int_{-2}^{-1} x^3 + 3x^2 + 1\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + x \right]_{-2}^{-1}$

$= (\frac{1}{4} - 1 - 1) - (4 - 8 - 2)$

$= -1\frac{3}{4} + 6 = 4\frac{1}{4} = 4{,}25$