

Q12 * Mathematik m4 * Klausur am 18.02.2013

1. In 15% der bekannten Überraschungseier befinden sich Figuren mit hohem Sammlerwert.
- Peter kauft 10 Überraschungseier.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Peter genau zwei bzw. mehr als zwei Figuren?
 - Wie viele Überraschungseier sollte Peter kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit für genau zwei Figuren größer ist als die für gar keine Figur?
 - Wie viele Überraschungseier muss Peter mindestens kaufen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens eine Figur bekommt?

Zu Ostern wird der Anteil an Überraschungseiern mit Figur werbewirksam auf 25% erhöht. Im Supermarkt sind die Überraschungseier mit den unterschiedlichen Figurenteilen zwar getrennt aufgestellt, aber leider fehlt ein Hinweis, welche Eier für Ostern hergestellt wurden.

- Peter kauft 20 Überraschungseier aus einer Produktion und stellt die Hypothese auf, dass er die „Osterproduktion“ ausgewählt hat, wenn er mindestens 5 Figuren bekommt.
Wie groß sind dann die Fehler erster und zweiter Art?

Nach dem Osterfest lässt der Filialleiter des Supermarkts 100 Überraschungseier mit 15% Figurenteil und 300 Eier mit 25% Figurenteil vermengen.

- Maria kauft sich zwei Überraschungseier aus dieser „Mischung“ und bekommt dabei genau eine Figur. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese Figur aus der Osterproduktion?
[Teilergebnis: $p_{\text{Figur, Mischung}} = 0,225$ (Prozentsatz der „Figureneier“ in der Mischung)]
- Hans kauft 6 Überraschungseier dieser „Mischung“.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Hans genau zwei Figuren?

2. Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass ca. 10% der Fluggäste zum Essen ein Glas Tomatensaft trinken.

- Wie viele Gläser Tomatensaft sind dann für 200 Fluggäste erforderlich, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% kein Fluggast auf seinen Tomatensaft verzichten soll.

Die Fluggesellschaft hat den Verdacht, dass der Anteil der Tomatensaft-Trinker auf mindestens 15% gestiegen ist, und will diesen Verdacht mit einem Signifikanztest bei 200 Fluggästen erhärten.

- Geben Sie die passende Nullhypothese an! Bestimmen Sie dann die Entscheidungsregel für einen Test auf dem Signifikanzniveau von 5%.
- Von den 200 Fluggästen haben sich 39 für einen Tomatensaft zum Essen entschieden. Welche Folgerung zieht die Fluggesellschaft aus dem Ergebnis des Signifikanztests?

3. Im \mathbb{R}^3 sind die folgenden Punkte gegeben:

$A(5/5/-5)$, $B(1/-2/-1)$, $C(2/2/7)$ und $P(11/-1/4)$

- Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann und bestimmen Sie die Koordinaten von D.
- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AC.
- Die senkrechte Projektion der Gerade AP in die x_2 - x_3 -Ebene liefert die Spurgrade g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und der Geraden AP.

Aufgabe	1a	b	c	d	e	f	2a	b	c	3a	b	c	d	Summe
Punkte	3	3	4	4	4	2	3	5	1	4	4	3	4	44





1. a) $P(X = 2) = B(10/0,15/2) = 0,27590 \approx 27,6\%$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P_{0,15}^{10}(X \leq 2) = 1 - 0,82020 = 0,17980 \approx 18,0\%$

b) Es soll gelten $P_{0,15}^n(X = 2) > P_{0,15}^n(X = 0)$.

Wegen $P_{0,15}^8(X = 2) = 0,23760 < 0,27249 = P_{0,15}^8(X = 0)$ und

$P_{0,15}^9(X = 2) = 0,25967 > 0,23162 = P_{0,15}^9(X = 0)$ muss Peter also mindestens 9 Eier kaufen.

c) $P_{0,15}^n(X > 0) \geq 95\% \Leftrightarrow 1 - P_{0,15}^n(X = 0) \geq 0,95 \Leftrightarrow P_{0,15}^n(X = 0) \leq 0,05 \Leftrightarrow 0,85^n \leq 0,05 \Leftrightarrow$

$\ln(0,85^n) \leq \ln(0,05) \Leftrightarrow n \cdot \ln(0,85) \leq \ln(0,05) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,85)} = 18,43\dots$

Peter muss also mindestens 19 Überraschungseier kaufen.

d) $H_1 : p = p_1 = 25\% \quad A_1 = \{5, 6, \dots, 20\}$ und $H_2 : p = p_2 = 15\% \quad A_2 = \{0, 1, \dots, 4\}$

Fehler erster Art: $P_{0,25}^{20}(X \leq 4) = 0,41484 \approx 41,5\%$

Fehler zweiter Art: $P_{0,15}^{20}(X > 4) = 1 - P_{0,15}^{20}(X \leq 4) = 1 - 0,82985 = 17,015\% \approx 17,0\%$

e) Anteil an Figureneiern in der Mischung:

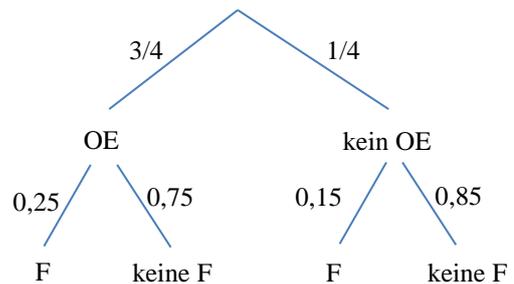
$p_F = 0,75 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,15 = 0,225$

$P_{\text{Figur}}(\text{OE}) = \frac{P(\text{Figur} \cap \text{OE})}{P(\text{Figur})} =$

$\frac{0,75 \cdot 0,25}{0,225} = \frac{5}{6} \approx 0,833 = 83,3\%$

Das Ei mit Figur stammt mit ca. 83,3%

Wahrscheinlichkeit aus der Osterproduktion.



f) $P_{0,225}^6(X = 2) = B(6/0,225/2) = \binom{6}{2} \cdot 0,225^2 \cdot 0,775^4 = 0,273944\dots \approx 27,4\%$

2. a) Gesucht ist k mit $P_{0,10}^{200}(X \leq k) \geq 95\% \Leftrightarrow k \geq 27$

Die Fluggesellschaft sollte also mindestens 27 Glas Tomatensaft vorrätig halten.

b) $H_0 : p < 15\% ; A = \{0, 1, \dots, k\}$ und $\bar{A} = \{k+1, \dots, 200\}$

$P_{p < 0,15}^{200}(x \in \bar{A}) \leq 5\% \Leftrightarrow P_{p < 0,15}^{200}(X > k) \leq 5\% \Leftrightarrow 1 - P_{p < 0,15}^{200}(X \leq k) \leq 5\% \Leftrightarrow$

$P_{p < 0,15}^{200}(X \leq k) \geq 0,95 \Leftrightarrow P_{p=0,15}^{200}(X \leq k) \geq 0,95 \Leftrightarrow k \geq 38 ;$ wähle also $\bar{A} = \{39, \dots, 200\}$

c) Wenn sich 39 Fluggäste für ein Glas Tomatensaft entscheiden, dann kann die Fluggesellschaft die Nullhypothese ablehnen, d.h. die Fluggesellschaft geht davon aus, dass der Anteil der Tomatensaft-Trinker auf 15% angestiegen ist.

$$3. a) \vec{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{BA} \circ \vec{BC} = 4 + 28 - 32 = 0 \Rightarrow \vec{BA} \perp \vec{BC}$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{16 + 49 + 16} = 9 \text{ und } |\vec{BC}| = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9, \text{ also Quadrat ABCD m\u00f6glich mit}$$

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also } D(6/9/3)$$

b) Projektion \vec{AF} des Vektors \vec{AP} auf \vec{AC} liefert

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \circ \vec{AC}}{|\vec{AC}|^2} \cdot \vec{AC} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}}{9 + 9 + 144} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{108}{162} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\vec{F} = \vec{A} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also } F(3/3/3) \text{ und } d = |\vec{PF}| = \sqrt{(11-3)^2 + (-1-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{81} = 9$$

c) Projektion von $A(5/5/-5)$ und $P(11/-1/4)$ in die x_2 - x_3 -Ebene liefert $A^*(0/5/-5)$ und $P^*(0/-1/4)$.

$$\text{Also } \vec{A^*P^*} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -1-5 \\ 4-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d) g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ geschnitten mit } AP: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ liefert den}$$

Spurpunkt von AP in der x_2 - x_3 -Ebene, d.h.

$$0 = 5 + 2k \Rightarrow k = -2,5 \text{ und Schnittpunkt } S(0/5+5/-5-7,5) = S(0/10/-12,5)$$

Schnittwinkel φ

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4+9}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{4+4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \varphi = 29,017...^\circ \approx 29,0^\circ$$