

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur linearen Abhängigkeit von Vektoren

1. Prüfen Sie jeweils, ob die drei Vektoren linear unabhängig sind.

Bestimmen Sie dann - falls möglich - den Vektor \vec{v} als
Linearkombination dieser drei Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



2. Bestimmen Sie k jeweils so, dass die drei Vektoren linear abhängig sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ k+1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. Prüfen Sie jeweils, ob die Punkte A, B und C eine Ebene aufspannen.

a) A(-1/5/1), B(2/2/7) und C(3/1/9)

b) A(-1/5/1), B(2/2/7) und C(3/1/5)

4. a) Begründen Sie, dass der Punkt P(1/2/3) nicht auf der durch die Punkte A(2/4/1) und B(3/1/4) festgelegten Geraden AB liegt.

b) Begründen Sie, dass der Punkt R(5/-5/10) auf der durch die Punkte A(2/4/1) und B(3/1/4) festgelegten Geraden AB liegt.

5. Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene aufspannen.

Prüfen Sie dann, ob die Punkte S und T in dieser Ebene liegen!

a) A(-2/0/5), B(-1/-2/2) und C(3/4/1)
S(1/8/7), T(2/0/1)

b) A(1/1/2), B(2/3/-1) und C(-2/2/4)
S(-2/9/-3), T(3/1/3)



Q12 * Mathematik * Aufgaben zur linearen Abhängigkeit von Vektoren * Lösungen

1. a) \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sind linear unabhängig und $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$
b) \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sind linear abhängig und \vec{v} lässt sich nicht als Linearkombination darstellen.
c) \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sind linear unabhängig und $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

2. a) Die drei Vektoren sind linear abhängig für $k_1 = 2$ und $k_2 = 7$
b) Die drei Vektoren sind linear abhängig für $k_1 = 1$ und $k_2 = -3\frac{3}{7}$.

3. a) \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} sind linear abhängig, daher spannen A, B und C keine Ebene auf.
b) \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} sind linear unabhängig, daher spannen A, B und C eine Ebene auf.

4. a) \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AP} sind linear unabhängig, daher liegt P nicht auf AB.
b) \overrightarrow{AR} und \overrightarrow{AB} sind linear abhängig ($\overrightarrow{AR} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$), daher liegt R auf AB.

5. a) \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} sind linear unabhängig, daher spannen A, B und C eine Ebene auf.
S liegt in dieser Ebene, denn $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.
T liegt nicht in dieser Ebene, denn \overrightarrow{AT} , \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} sind linear unabhängig.
b) \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} sind linear unabhängig, daher spannen A, B und C eine Ebene auf.
S liegt in dieser Ebene, denn $\overrightarrow{AS} = 3 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.
T liegt nicht in dieser Ebene, denn \overrightarrow{AT} , \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} sind linear unabhängig.

