

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vektorrechnung (Wiederholung)

Vektoren: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$; $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$; $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

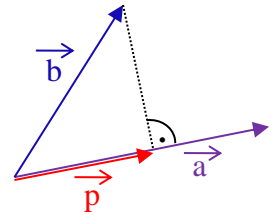
Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b})$ also $\cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ und $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi(\vec{a}, \vec{b})$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$; $V_{\text{Pyramide } ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AD} \circ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})|$

Hilfreich: Die **Projektion** \vec{p} eines Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a}

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{\vec{a} \circ \vec{a}} \cdot \vec{a}$$



1. Gegeben sind die Punkte $A(-2/-1/4)$, $B(6/5/0)$, $C(8/3/1)$ und $P(3/6/10)$.

- Ergänzen Sie das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ABCD und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.
- Zeigen Sie, dass P nicht in der vom Dreieck ABC aufgespannten Ebene liegt.
- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AB.



2. Gegeben sind die Punkte $A(1/2/3)$, $B(7/-4/6)$ und $C(6/0/7)$.

- Zeigen Sie, dass C nicht auf der Geraden $g = AB$ liegt.
- Berechnen Sie im Dreieck ABC die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ und die Länge b der Seite [AC].
- Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lots von C auf die Gerade g. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Fußpunktes den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit Hilfe eines geeigneten Kreuzproduktes.
- Bestimmen Sie einen Punkt P so, dass die Pyramide ABCP das Volumen 54 besitzt.
- Der Punkt C soll an der Geraden g gespiegelt werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes C*.
- Bestimmen Sie zwei Punkte S und T auf der Geraden g so, dass das Dreieck STC gleichschenkelig und rechtwinklig ist, mit dem rechten Winkel bei
 - T
 - C.
- Bestimmen Sie einen Punkt M so, dass die Kugel mit Mittelpunkt M und Radius $r = 6$ die durch das Dreieck ABC aufgespannte Ebene E als Tangentialfläche besitzt.



3. Gegeben sind die Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/5/-3)$ und $C(9/7/0)$.

- Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.
- Bestimmen Sie den Mittelpunkt M einer Kugel mit Radius $r_1 = 3,5$ so, dass diese Kugel das Quadrat im Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrats berührt.
- Die Kugel um M (aus Aufgabe b) mit dem Radius $r_2 = 5,5$ schneidet die durch das Quadrat festgelegte Ebene E in einem Kreis mit dem Radius r_3 . Berechnen Sie r_3 !



Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vektorrechnung (Wiederholung) * Lösungen

$$1. a) \vec{D} = \vec{A} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8-6 \\ 3-5 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ also } D(0/-3/5)$$

$$A_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -28 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 16^2 + 28^2} = 6 \cdot \sqrt{29}$$

$$b) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$



und der Ansatz $\vec{AP} = r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AD}$ führt zu einem Widerspruch.

$$\text{Oder } V_{\text{Pyramide ABDP}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{AP} \circ (\vec{AB} \times \vec{AD})| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -28 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-10 - 112 - 168| = 48 \frac{1}{3} \neq 0$$

c) Projektion von \vec{AP} auf \vec{AB} liefert \vec{AF} mit dem Fußpunkt F.

$$\vec{AF} = \frac{\vec{AP} \circ \vec{AB}}{\vec{AB} \circ \vec{AB}} \cdot \vec{AB} = \frac{40 + 42 - 24}{64 + 36 + 16} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ also } \vec{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{gesuchter Abstand } d = |\vec{PF}| = \sqrt{(3-2)^2 + (6-2)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$2. a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ -4-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 0-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{AC} \neq r \cdot \vec{AB} \text{ für alle } r \in \mathbb{R}$$



also liegt der Punkt C nicht auf der geraden $g = AB$.

$$b) |\vec{AC}| = \sqrt{25 + 4 + 16} = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5} \text{ und}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{30 + 12 + 12}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26,56\dots^\circ \approx 26,6^\circ$$

$$c) \vec{AF} = \frac{\vec{AC} \circ \vec{AB}}{\vec{AB} \circ \vec{AB}} \cdot \vec{AB} = \frac{30 + 12 + 12}{36 + 36 + 9} \cdot \vec{AB} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ also } \vec{F} = \vec{A} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{CF}| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{(6-5)^2 + (0+2)^2 + (7-5)^2} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} = 13,5$$

$$d) A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -18 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18^2 + 9^2 + 18^2} = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13,5$$

$$e) V = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3 \cdot V}{A_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 54}{13,5} = 12 \quad \text{und} \quad \vec{n} = \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ steht senkrecht auf}$$

$$\text{der Dreiecksfläche und } |\vec{n}| = 3, \text{ also ist z.B. } \vec{P} = \vec{A} + 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix},$$

also $P(-7/-2/11)$ eine passende Pyramidenspitze.

$$f) \vec{C}^* = \vec{F} + \overrightarrow{CF} = 2 \cdot \vec{F} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ -4-0 \\ 10-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ also } C^*(4/-4/3)$$

$$g) i) T = F = (5/-2/5) \quad \text{und} \quad \vec{S} = \vec{F} + \frac{|\overrightarrow{CF}|}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ also } S(7/-4/6)$$

$$ii) S(7/-4/6) \text{ wie bei i) und } \vec{T} = \vec{F} - \frac{|\overrightarrow{CF}|}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{3}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ also } T(3/0/4)$$

h) M muss von der Ebene E den Abstand $d = r = 6$ besitzen.

$$\text{z.B. } \vec{M} = \vec{A} + 6 \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$3. a) \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$$

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = -12 - 6 + 18 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow$$

$$\text{Quadrat ABCD mit } \vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1+6 \\ 2+2 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ also } D(7/4/6)$$

$$b) \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 42 \\ 14 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{verwende } \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } |\vec{n}| = 7$$

Diagonalschnittpunkt S mit $\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{C})$ also $S(5/4,5/1,5)$ und

$$\vec{M} = \vec{S} \pm 3,5 \cdot \frac{1}{7} \cdot \vec{n} \quad \text{also z.B. } \vec{M} = \vec{S} + 3,5 \cdot \frac{1}{7} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 7,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$c) \text{ Es gilt } r_1^2 + r_3^2 = r_2^2 \text{ also } r_3 = \sqrt{r_2^2 - r_1^2} = \sqrt{5,5^2 - 3,5^2} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

