

Q12 * Mathematik * Typische Aufgaben zum Skalarprodukt im \mathbb{R}^3

1. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E , die von der Geraden AB senkrecht im Punkt A geschnitten wird. Es gelte $A(1/2/3)$ und $B(5/-1/1)$.

2. Gegeben ist die Ebene E im \mathbb{R}^3 mit $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g , die die Ebene E senkrecht schneidet.
b) Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene E .

3. Im \mathbb{R}^3 sind die drei Punkte $A(1/2/-3)$, $B(7/5/3)$ und $C(1/-1/3)$ gegeben.

- a) Bestimmen Sie die drei Seitenlängen im Dreieck ABC .
b) Bestimmen Sie die drei Innenwinkel im Dreieck ABC .
c) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von C auf die Seite $[AB]$.
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .



4. Im \mathbb{R}^3 sind die drei Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/2/4)$ und $C(5/5/4)$ gegeben.

- a) Geben Sie die Gleichung der durch die drei Punkte A , B und C festgelegten Ebene E an.
b) Bestimmen Sie einen Punkt, der von der Ebene E den Abstand 14 hat.
c) Geben Sie eine Gerade g an, die im Abstand 7 parallel zur Ebene E verläuft.

5. Gegeben sind die beiden Geraden g und h mit

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Begründen Sie, dass g und h parallel zueinander liegen.
b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden voneinander!

6. Im \mathbb{R}^3 ist die Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$, der Punkt $P(6/-3/6)$ und die

Gerade $g: g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass P nicht in der Ebene E liegt und bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P^* von P bei Spiegelung an der Ebene E .
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Spiegelgeraden g^* von g bei Spiegelung an der Ebene E .

Q12 * Mathematik * Typische Aufgaben zum Skalarprodukt im R3 * Lösungen



1. Gerade AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. a) $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; also z.B. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) E: $+1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 = 0$; die **Koeffizienten** bei x_1, x_2 und x_3 stimmen mit den Koordinaten des Richtungsvektors von g überein.

3. a) $\overline{AB} = 9$; $\overline{AC} = 3 \cdot \sqrt{5}$; $\overline{BC} = 6 \cdot \sqrt{2}$

b) $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$; $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = 45^\circ$; $\cos(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \lambda \approx 71,6^\circ$;

c) $F(3/3/-1)$

d) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 27$

4. a) z.B. E: $\vec{X} = \vec{A} + s \cdot \overline{AB} + t \cdot \overline{AC}$ also E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B. für $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{n}^\circ = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

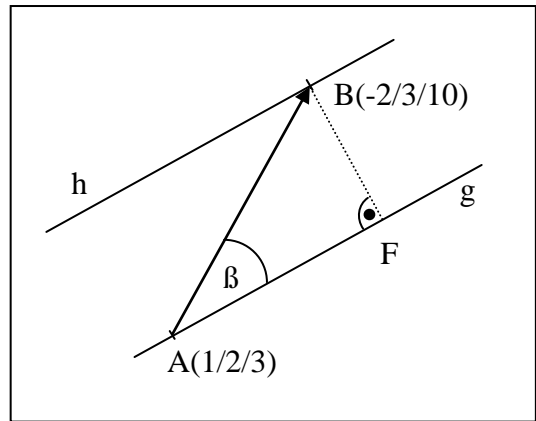
z.B. $\vec{P} = \vec{A} + 14 \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 14 \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$, also $P(-5/6/15)$

c) Wähle als Aufpunkt Q von g , z.B.: $\vec{Q} = \vec{A} + 7 \cdot \vec{n}^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

und wähle z.B. $g \parallel \overline{AB}$, d.h. dann $g: \vec{X} = \vec{Q} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. a) Für die Richtungsvektoren gilt $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, also gilt $g \parallel h$.

$$\text{b) } \cos(\beta) = \frac{\overline{AB} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left| \overline{AB} \right| \cdot \sqrt{16+9+4}} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+1+49} \cdot \sqrt{16+9+4}} = \frac{29}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{29}}$$



(also $\beta \approx 45,49^\circ$)

und $d = \overline{BF} = \overline{AB} \cdot \sin(\beta) = \sqrt{59} \cdot \sin(\beta) \approx 5,48$

Man kann aber F auch direkt ausrechnen! (Vorteil: Man erhält ein exaktes Ergebnis!) Die Ebene E soll B enthalten und von h senkrecht geschnitten werden. Es gilt:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E \cap g = \{F\}$$

nach dem Gleichsetzen folgt $t = -1, k = -1$ und $r = 1$ also $F(-3/5/5)$ und

$$d = \overline{BF} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30} \approx 5,48$$

6. a) P liegt nicht in E , denn $2 \cdot 6 - 2 \cdot (-3) + 6 = 24 \neq 6$

$A(3/0/0), B(0/-3/0), C(0/0/6) \in E$, d.h. $\overline{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overline{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ spannen E auf.

$$\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{gilt z.B. für } \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$g: \vec{X} = \vec{P} + r \cdot \vec{n}$; $g \cap E$ liefert $r = -2$ und $g \cap E = \{S\}$ mit $S(2/1/4)$

$$\vec{P}^* = \vec{P} + 2 \cdot \overline{PS} = \vec{S} + \overline{SP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{also } P^*(-2/5/2)$$

b) $E \cap g: 2 \cdot (4+2r) - 2 \cdot (-3-r) + (1+3r) = 6 \Leftrightarrow 9r = -9 \Leftrightarrow r = -1$ also

$E \cap g = \{S\}$ mit $S(2/-2/-2)$; wähle $T(4/-3/1) \in g$ und $h: \vec{X} = \vec{T} + s \cdot \vec{n}$ (\vec{n} aus 6a))

$h \cap E = \{Q\}$ und $\vec{T}^* = \vec{T} + 2 \cdot \overline{TQ}$ und ST^* ist die gesuchte Spiegelgerade.

$h \cap E = \{Q\}$ liefert $2(4+2s) - 2(-3-2s) + 1+s = 6 \Leftrightarrow s = -1$ und $Q(2/-1/0)$

$$\vec{T}^* = \vec{T} + 2 \cdot \overline{TQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{also } T^*(0/3/1) \quad \text{und} \quad g^*: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$