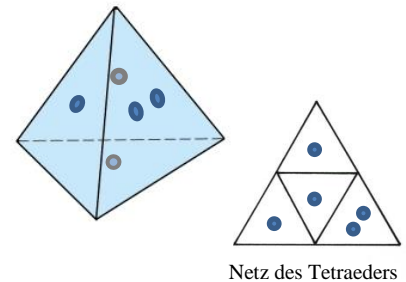


Klausur aus der Mathematik * Q12 * m3 * 02.02.2016

1. Die vier Flächen eines Tetraeders sind mit „Augen“ versehen. Drei der Flächen tragen jeweils ein Auge, auf der vierten Fläche sind zwei Augen aufgemalt.



Netz des Tetraeders

Anna „würfelt“ zweimal mit diesem Tetraeder.

Die Zufallsgröße X gibt die Augensumme der beiden Würfe an.

- Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Bernd „würfelt“ 20-mal mit diesem Tetraeder und bildet dabei die Augensumme.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Bernd genau die Augensumme 24?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Augensumme höchstens 22?

Claudia möchte mit dem Tetraeder unbedingt die Augenzahl 2 würfeln.

- Wie oft muss Claudia den Tetraeder mindestens werfen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal die Augenzahl 2 bekommt?

2. „Golden Flight“ bietet den Flug von München nach Hamburg mit einem Airbus A321 an. Der Airbus A321 der Fluglinie besitzt 195 Sitzplätze, davon 20 Sitzplätze der First Class.

- Erfahrungsgemäß treten 4% der Fluggäste den gebuchten Flug nicht an.

„Golden Flight“ verkauft daher 200 Tickets für diesen Flug.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen die Sitzplätze nicht?

- Erfahrungsgemäß trinken 60 % der First Class Fluggäste zur Begrüßung einen Piccolo.

Wie viele Piccolos sollten an Bord sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% alle Piccolowünsche erfüllt werden können?

3. Eine Großbäckerei in München stellt zur Faschingszeit Krapfen mit Himbeer- bzw. Orangenkonfitüre her. Bei einer üblichen Lieferung an die Verkaufsstellen sind 50% der Krapfen mit Himbeer- und 50% mit Orangenkonfitüre gefüllt.

Durch eine Unachtsamkeit in der Bäckerei entfällt eine „fehlerhafte“ Lieferungen Krapfen, die zu 60% mit Himbeer- und zu 40% mit Orangenkonfitüre gefüllt sind.

An der Verkaufsstelle in Haar vermutet man die fehlerhafte Lieferung erhalten zu haben, wenn von den ersten 20 verkauften Krapfen mehr als 11 Himbeerkonfitüre enthalten.

Wie groß ist der Fehler erster Art, den man dabei in Haar macht? Erläutern Sie Ihre Rechnung.

4. Eine Verbraucherschutzzentrale behauptet, dass mehr als 15% einer Automarke schadhafte Katalysatoren besitzen. Der Autokonzern möchte diese Behauptung gerne widerlegen und prüft bei der turnusmäßigen Inspektion von 100 Autos dieser Marke die Katalysatoren.

- Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für einen Signifikanztest des Autokonzerns auf dem Signifikanzniveau von 10%.

Kann der Autokonzern der Behauptung der Verbraucherschutzzentrale widersprechen, wenn sich bei der Inspektion 11 der 100 Katalysatoren als schadhaft erweisen?

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 11 der 100 Katalysatoren beanstandet werden, obwohl tatsächlich nur 10% schadhafte sind.

Aufgabe	1a	b	c	d	e	2a	b	3	4a	b	Summe
Punkte	3	4	2	3	4	3	3	4	5	2	33



Gutes Gelingen! G.R.

Klausur aus der Mathematik * Q12 * m3 * 02.02.2016 * Lösung

1. a) $X =$ „Augensumme der beiden Würfe“

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \quad ; \quad P(X=3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} \quad ; \quad P(X=4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

x	2	3	4
P(X=x)	9/16	6/16	1/16

b) $E(X) = 2 \cdot \frac{9}{16} + 3 \cdot \frac{6}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{18+18+4}{16} = \frac{40}{16} = 2,5$

$$\text{Var}(X) = (2-2,5)^2 \cdot \frac{9}{16} + (3-2,5)^2 \cdot \frac{6}{16} + (4-2,5)^2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{2,25+1,5+2,25}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

c) $n = 20$; $p = \frac{3}{4}$ für Augenzahl 1 bei einem Wurf (Treffer) ; $X =$ „Anzahl der Treffer“
Für die Augensumme benötigt man genau 16 Treffer, denn $24 = 16 \cdot 1 + 4 \cdot 2$.

$$P(\text{"Augensumme} = 24") = P(X=16) = B(20 ; \frac{3}{4} ; 16) = 0,18969 \approx 19\%$$

d) Für Augensumme höchstens 22 benötigt man mindestens 18 Treffer,
denn $22 = 18 \cdot 1 + 2 \cdot 2$. Also $P(\text{"Augensumme höchstens 22"}) = P_{0,75}^{20}(X \geq 18) =$
 $1 - P_{0,75}^{20}(X \leq 17) = 1 - 0,90874 = 0,09126 \approx 9\%$

e) $p = 0,25$ (Treffer bedeutet Augenzahl 2) und $q = 0,75$.

$$P_{0,25}^n(X \geq 1) > 99\% \Leftrightarrow 1 - P_{0,25}^n(X = 0) > 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,75^n > 0,99 \Leftrightarrow$$

$$0,01 > 0,75^n \Leftrightarrow \ln(0,01) > n \cdot \ln(0,75) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,75)} < n \Leftrightarrow n > 16,0078... \text{ also } n \geq 17$$

Claudia muss also mindestens 17-mal würfeln.

2. a) $P(\text{"Sitzplätze reichen nicht"}) = P(\text{"weniger als 5 treten Flug nicht an"}) =$
 $P_{0,04}^{200}(X \leq 4) = 0,09502 \approx 9,5\%$

b) $n = 20$, $p = 0,6$ (Gast wünscht Piccolo), $P(\text{"Piccoloanzahl reicht"}) \geq 95\%$ bedeutet
 $P_{0,6}^{20}(X \leq k) \geq 95\% \Leftrightarrow k \geq 16$ (denn $P_{0,6}^{20}(X \leq 15) = 94,905\%$ und $P_{0,6}^{20}(X \leq 16) = 98,404\%$)
Es sollten also mindestens 16 Piccolos an Bord sein.

3. Die Vermutung der Verkaufsstelle Haar entspricht der Nullhypothese H_0 .

$$H_0 : p = 60\% \text{ (für Himbeerkonfitüre) mit } A = \{12, 13, \dots, 20\} \text{ und } \bar{A} = \{0, 1, \dots, 11\}$$

$$H_1 : p = 50\%$$

Der Fehler erster Art gibt die Wahrscheinlichkeit an für das irrtümliche Ablehnen der Nullhypothese, also $P_{0,6}^{20}(x \in \bar{A}) = P_{0,6}^{20}(x \leq 11) = 0,40440 \approx 40,4\%$.

Mit ca. 40% Wahrscheinlichkeit hält die Verkaufsstelle die Lieferung für eine übliche obwohl sie fehlerhaft ist.

4. a) $n = 100$; $H_0 : p = p_0 > 15\%$ und $A = \{k+1, \dots, 100\}$ und $\bar{A} = \{0, 1, 2, \dots, k\}$

$$P_{p>0,15}^{100}(x \in \bar{A}) \leq 10\% \Leftrightarrow P_{0,15}^{100}(x \leq k) \leq 0,10 \Leftrightarrow k \leq 10 \text{ also } \bar{A} = \{0, 1, \dots, 10\}$$

Der Autokonzern kann also der Behauptung der Verbraucherzentrale nicht widersprechen.

b) $P_{0,10}^{100}(X \geq 11) = 1 - P_{0,10}^{100}(X \leq 10) = 1 - 0,58316 = 0,41684 \approx 41,7\%$