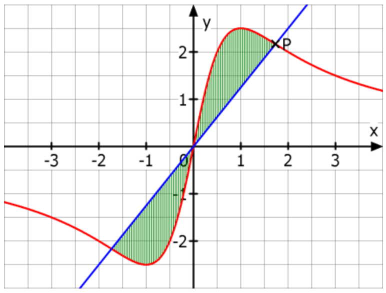
Q12 * Mathematik m4 * Klausur am 12.11.2012 * Gruppe A

1. Berechnen Sie die beiden bestimmten Integrale.

   a) $\int_{-1}^{2} 2x^3 - x \; dx$ b) $\int_{1}^{9} 0{,}5 \cdot \sqrt{x} \; dx$

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit

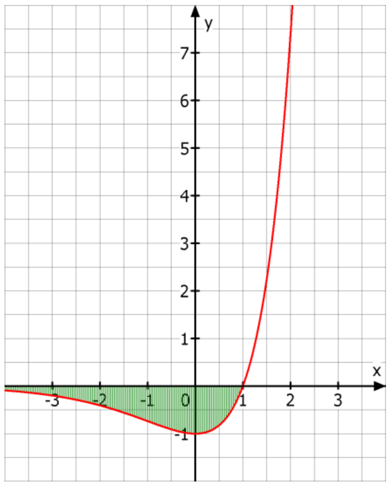


   $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$; $x \in \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie, dass der Graph von f genau drei Wendepunkte besitzt, wobei der Punkt P im Bild einer dieser Wendepunkte ist. [Teilergebnis: $P(\sqrt{3}\,;\,...)$]

   b) Die Ursprungsgerade durch den Wendepunkt P schließt mit dem Graphen von f die grün schraffierte Fläche mit dem Inhalt A ein. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A .

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit



   $f(x) = (x-1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
   (Der Graph ist auch nochmals auf dem Arbeitsblatt angegeben.)

   a) Zeigen Sie, dass $F(x) = (x-2) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist und dass für $a < 1$ gilt: $\int_{a}^{1} f(x)\,dx = (2-a) \cdot e^a - e$.

   b) Der Graph von f und die x-Achse schließen eine sich ins Unendliche erstreckende, im Bild grün schraffierte Fläche mit dem endlichen Inhalt A ein.
   Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A .
   (Hinweis: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x \cdot e^x) = 0$ darf verwendet werden.)

   c) Begründen Sie, dass es genau ein $k > 1$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: $\int_{-1}^{k} f(x)\,dx = 0$.

   Schätzen Sie den Wert von k ab. Erläutern Sie Ihre Abschätzung auf dem Arbeitsblatt durch geeignete Eintragungen.

   d) Berechnen Sie den Wert von $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$. Begründen Sie nun, ob $k \geq 2$ oder $k < 2$ gilt.

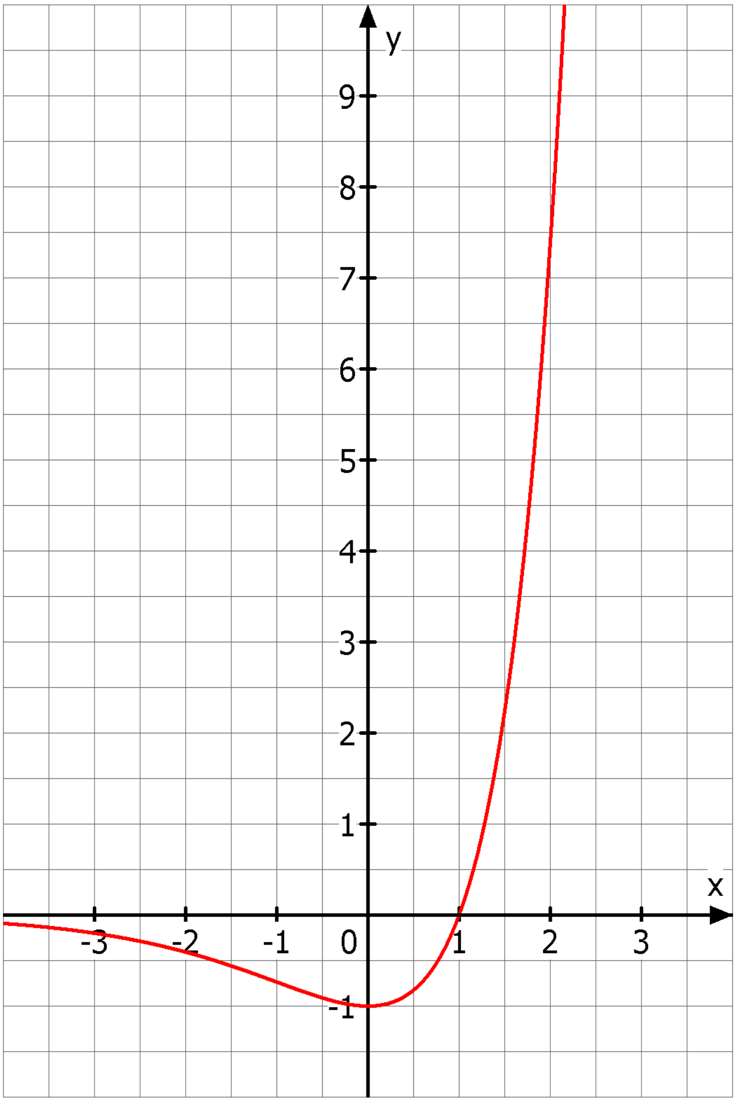
Aufgabe	1a	b	2a	b	3a	b	c	d	Summe
Punkte	3	4	7	7	4	3	3	4	35

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m4 * Arbeitsblatt zur Klausur am 12.11.2012 * Gruppe A/B

Name: ……………………………………

Bild zur Aufgabe 3



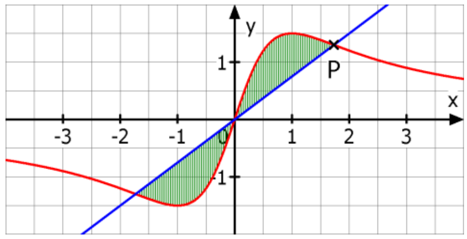
Q12 * Mathematik m4 * Klausur am 12.11.2012 * Gruppe B

1. Berechnen Sie die beiden bestimmten Integrale.

   a) $\int_{-2}^{1} 2x^3 - x \; dx$ b) $\int_{4}^{9} 0{,}5 \cdot \sqrt{x} \; dx$

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit

   $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$; $x \in \mathbb{R}$.



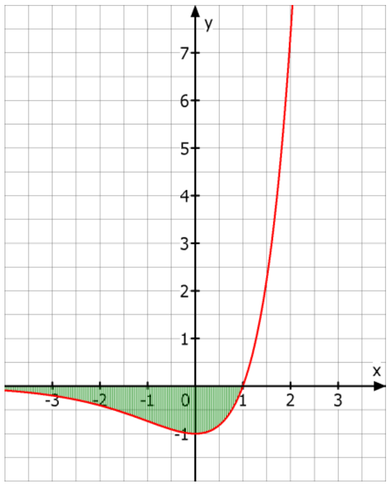
   a) Zeigen Sie, dass der Graph von f genau drei Wendepunkte besitzt, wobei der Punkt P im Bild einer dieser Wendepunkte ist. [Teilergebnis: $P(\sqrt{3}\,;\,...)$]

   b) Die Ursprungsgerade durch den Wendepunkt P schließt mit dem Graphen von f die grün schraffierte Fläche mit dem Inhalt A ein. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A .

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit

   $f(x) = (x-1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

   (Der Graph ist auch nochmals auf dem Arbeitsblatt angegeben.)



   a) Zeigen Sie, dass $F(x) = (x-2) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist und dass für $a < 1$ gilt: $\int_{a}^{1} f(x)\, dx = (2-a) \cdot e^a - e$.

   b) Der Graph von f und die x-Achse schließen eine sich ins Unendliche erstreckende, im Bild grün schraffierte Fläche mit dem endlichen Inhalt A ein. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A .
   (Hinweis: $\lim_{x \to -\infty} (x \cdot e^x) = 0$ darf verwendet werden.)

   c) Begründen Sie, dass es genau ein $k > 1$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: $\int_{-1}^{k} f(x)\, dx = 0$.

   Schätzen Sie den Wert von k ab. Erläutern Sie Ihre Abschätzung auf dem Arbeitsblatt durch geeignete Eintragungen.

   d) Berechnen Sie den Wert von $\int_{1}^{2} f(x)\, dx$. Begründen Sie nun, ob $k \geq 2$ oder $k < 2$ gilt.

Aufgabe	1a	b	2a	b	3a	b	c	d	Summe
Punkte	3	4	7	7	4	3	3	4	35

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m4 * Klausur am 12.11.2012 * Gruppe A * Lösung

1. a) $\int\limits_{-1}^{2} 2x^3 - x \; dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = (8-2) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 6$

b) $\int\limits_{1}^{9} 0{,}5 \cdot \sqrt{x} \; dx = \int\limits_{1}^{9} 0{,}5 \cdot x^{0{,}5} \; dx = \left[0{,}5 \cdot \frac{x^{1{,}5}}{1{,}5} \right]_{1}^{9} = \left[\frac{x^{1{,}5}}{3} \right]_{1}^{9} = 3 \cdot 3 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

2. a) $f(x) = \frac{5x}{x^2+1} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{5 \cdot (x^2+1) - 5x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{5 - 5x^2}{(x^2+1)^2}$ und

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-10x) - (5-5x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1) \cdot (-10x) - (5-5x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^3} =$$

$$\frac{-10x^3 - 10x - (20x - 20x^3)}{(x^2+1)^3} = \frac{10x^3 - 30x}{(x^2+1)^3} = \frac{10x \cdot (x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 10x \cdot (x^2 - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \;;\; x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$

Da $f''(x)$ an allen drei Stellen das Vorzeichen wechselt, besitzt G_f an diesen drei Stellen jeweils einen Wendepunkt.

$P(\sqrt{3}\,;\, f(\sqrt{3}))$ …..

b) Ursprungsgerade: $P(\sqrt{3}\,;\, f(\sqrt{3})) = P(\sqrt{3}\,;\, \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{4}) \;\Rightarrow\; g(x) = \frac{5}{4}x$

$$A = 2 \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} f(x) - g(x) \; dx = 2 \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{5x}{x^2+1} - \frac{5x}{4} \; dx = 2 \cdot \left[\frac{5}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{5x^2}{8} \right]_{-0}^{\sqrt{3}} =$$

$$5 \cdot \ln(3+1) - \frac{5 \cdot 3}{4} - (5 \cdot \ln(1) - 0) = 5 \cdot \ln(4) - \frac{15}{4} - 0 = 5 \cdot \ln(4) - \frac{15}{4} \approx 3{,}18$$

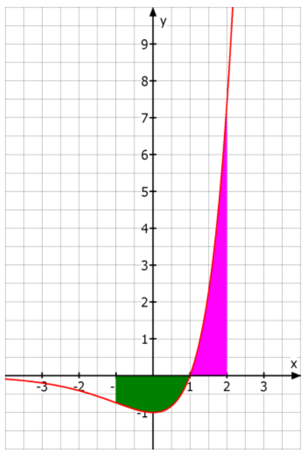
3. a) $F(x) = (x-2) \cdot e^x \;\Rightarrow\; F'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x = (x-1) \cdot e^x = f(x)$,

also ist F Stammfunktion von f.

$$\int\limits_{a}^{1} f(x) \; dx = \left[(x-2) \cdot e^x \right]_{a}^{1} = -1 \cdot e^1 - ((a-2) \cdot e^a) = (2-a) \cdot e^a - e$$

b) $A = -\lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{1} f(x) \; dx = -\lim\limits_{a \to -\infty} \left((2-a) \cdot e^a - e \right) = -\lim\limits_{a \to -\infty} \left(2 \cdot e^a - a \cdot e^a - e \right) =$

$-(0 - 0 - e) = e$



c) $\int\limits_{-1}^{1} f(x) \; dx < 0$ und $\int\limits_{-1}^{x} f(x) \; dx$ ist für $x > 1$ streng monoton

wachsend, d.h. es gibt ein $k \approx 2$ mit $\int\limits_{-1}^{k} f(x) \; dx = 0$

Grüne und lila Flächen haben etwa gleichen Inhalt.

d) $\int\limits_{1}^{2} f(x) \; dx = \left[(x-2) \cdot e^x \right]_{1}^{2} = 0 - (-1 \cdot e^1) = e = A$ aus Aufgabe b.

Die lila Fläche ist also größer als die grüne und damit $k < 2$.

Q12 * Mathematik m4 * Klausur am 12.11.2012 * Gruppe B * Lösung

1. a) $\int\limits_{-2}^{1} 2x^3 - x\ dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - (8-2) = -6$

b) $\int\limits_{4}^{9} 0{,}5\cdot\sqrt{x}\ dx = \int\limits_{4}^{9} 0{,}5\cdot x^{0{,}5}\ dx = \left[0{,}5\cdot\frac{x^{1{,}5}}{1{,}5}\right]_{1}^{9} = \left[\frac{x^{1{,}5}}{3}\right]_{1}^{9} = 3\cdot 3 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$

2. a) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3\cdot(x^2+1) - 3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}$ und

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2\cdot(-6x) - (3-3x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)\cdot(-6x) - (3-3x^2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+1)^3} =$$

$$\frac{-6x^3 - 6x - (12x - 12x^3)}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2+1)^3} = \frac{6x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x) = 0 \iff 6x\cdot(x^2-3) = 0 \iff x_1 = 0\ ;\ x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$

Da $f''(x)$ an allen drei Stellen das Vorzeichen wechselt, besitzt G_f an diesen drei Stellen jeweils einen Wendepunkt.

$P(\sqrt{3}\ ;\ f(\sqrt{3}))$ …..

b) Ursprungsgerade: $P(\sqrt{3}\ ;\ f(\sqrt{3})) = P(\sqrt{3}\ ;\ \frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}) \Rightarrow g(x) = \frac{3}{4}x$

$$A = 2\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} f(x) - g(x)\ dx = 2\cdot\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{x^2+1} - \frac{3x}{4}\ dx = 2\cdot\left[\frac{3}{2}\cdot\ln(x^2+1) - \frac{3x^2}{8}\right]_{-0}^{\sqrt{3}} =$$

$$3\cdot\ln(3+1) - \frac{3\cdot 3}{4} - (\ 3\cdot\ln(1) - 0\ ) = 3\cdot\ln(4) - \frac{9}{4} - 0 = 3\cdot\ln(4) - \frac{9}{4} \approx 1{,}91$$

3. a) $F(x) = (x-2)\cdot e^x \Rightarrow F'(x) = 1\cdot e^x + (x-2)\cdot e^x = (x-1)\cdot e^x = f(x)$,

also ist F Stammfunktion von f.

$\int\limits_{a}^{1} f(x)\ dx = \left[(x-2)\cdot e^x\right]_a^1 = -1\cdot e^1 - ((a-2)\cdot e^a) = (2-a)\cdot e^a - e$

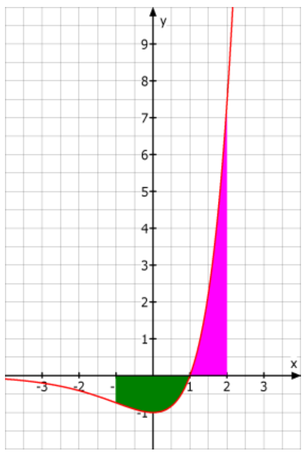
b) $A = -\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1} f(x)\ dx = -\lim\limits_{a\to-\infty}\left((2-a)\cdot e^a - e\right) = -\lim\limits_{a\to-\infty}\left(2\cdot e^a - a\cdot e^a - e\right) =$

$-(0-0-e) = e$

c) $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\ dx < 0$ und $\int\limits_{-1}^{x} f(x)\ dx$ ist für $x > 1$ streng monoton

wachsend, d.h. es gibt ein $k \approx 2$ mit $\int\limits_{-1}^{k} f(x)\ dx = 0$

Grüne und lila Flächen haben etwa gleichen Inhalt.



d) $\int\limits_{1}^{2} f(x)\ dx = \left[(x-2)\cdot e^x\right]_1^2 = 0 - (-1\cdot e^1) = e = A$ aus Aufgabe b.

Die lila Fläche ist also größer als die grüne und damit $k < 2$.