

# Q12 \* Mathematik m4 \* Klausur am 12.11.2012 \* Gruppe A

1. Berechnen Sie die beiden bestimmten Integrale.

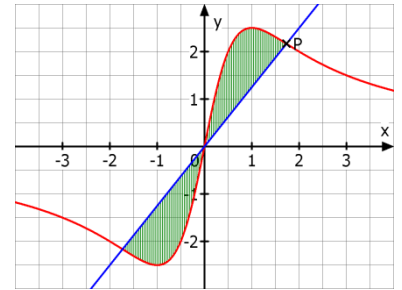
a)  $\int_{-1}^2 2x^3 - x \, dx$       b)  $\int_1^9 0,5 \cdot \sqrt{x} \, dx$

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} .$$

a) Zeigen Sie, dass der Graph von  $f$  genau drei Wendepunkte besitzt, wobei der Punkt  $P$  im Bild einer dieser Wendepunkte ist. [Teilergebnis:  $P(\sqrt{3}; \dots)$  ]

b) Die Ursprungsgerade durch den Wendepunkt  $P$  schließt mit dem Graphen von  $f$  die grün schraffierte Fläche mit dem Inhalt  $A$  ein. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt  $A$ .



3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = (x-1) \cdot e^x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} .$$

(Der Graph ist auch nochmals auf dem Arbeitsblatt angegeben.)

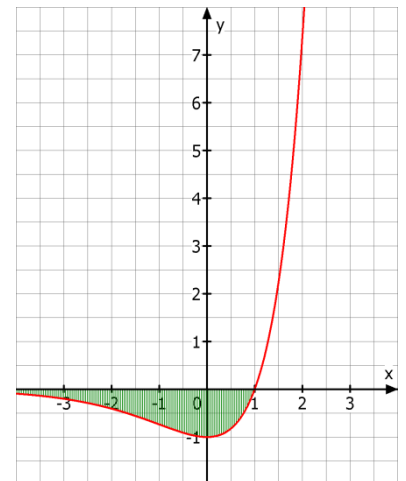
a) Zeigen Sie, dass  $F(x) = (x-2) \cdot e^x$  eine Stammfunktion von

$$f \text{ ist und dass für } a < 1 \text{ gilt: } \int_a^1 f(x) \, dx = (2-a) \cdot e^a - e .$$

b) Der Graph von  $f$  und die  $x$ -Achse schließen eine sich ins Unendliche erstreckende, im Bild grün schraffierte Fläche mit dem endlichen Inhalt  $A$  ein.

Berechnen Sie diesen Flächeninhalt  $A$ .

(Hinweis:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) = 0$  darf verwendet werden.)



c) Begründen Sie, dass es genau ein  $k > 1$  mit der folgenden Eigenschaft gibt:  $\int_{-1}^k f(x) \, dx = 0$ .

Schätzen Sie den Wert von  $k$  ab. Erläutern Sie Ihre Abschätzung auf dem Arbeitsblatt durch geeignete Eintragungen.

d) Berechnen Sie den Wert von  $\int_1^2 f(x) \, dx$ . Begründen Sie nun, ob  $k \geq 2$  oder  $k < 2$  gilt.

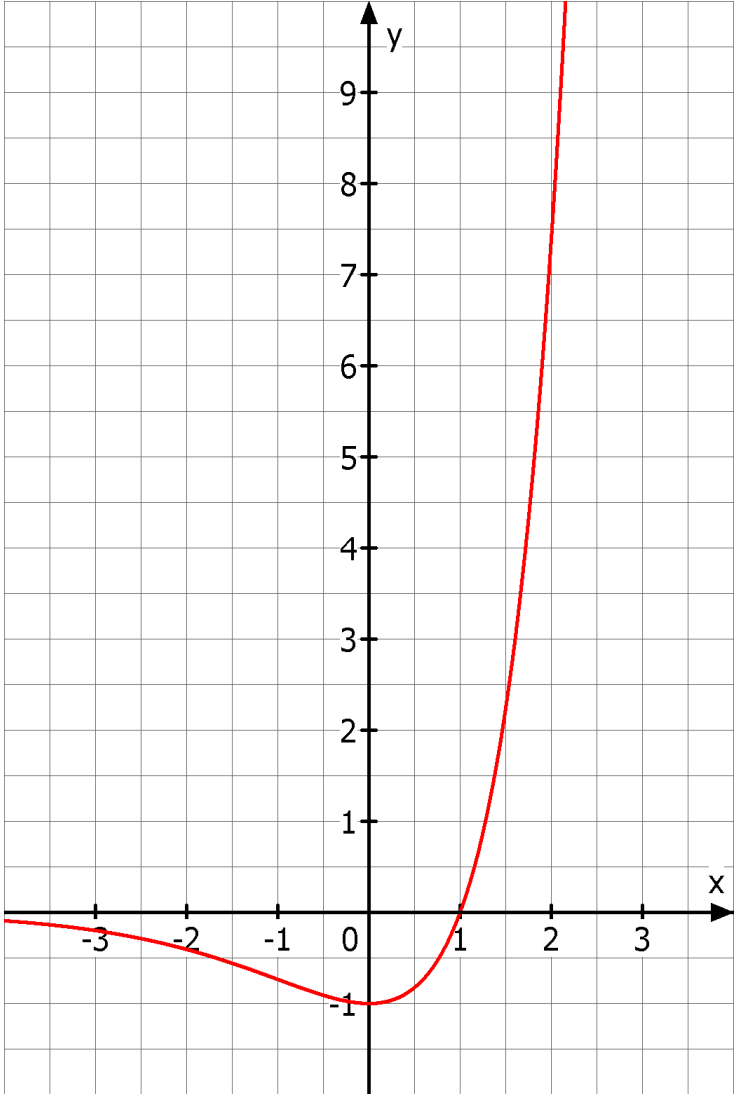
Aufgabe	1a	b	2a	b	3a	b	c	d	Summe
Punkte	3	4	7	7	4	3	3	4	35



Gutes Gelingen! G.R.

Name: .....

Bild zur Aufgabe 3



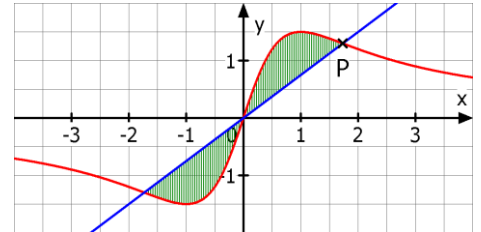
# Q12 \* Mathematik m4 \* Klausur am 12.11.2012 \* Gruppe B

1. Berechnen Sie die beiden bestimmten Integrale.

a)  $\int_{-2}^1 2x^3 - x \, dx$                       b)  $\int_4^9 0,5 \cdot \sqrt{x} \, dx$

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} .$$



a) Zeigen Sie, dass der Graph von  $f$  genau drei Wendepunkte besitzt, wobei der Punkt  $P$  im Bild einer dieser Wendepunkte ist. [Teilergebnis:  $P(\sqrt{3}; \dots)$  ]

b) Die Ursprungsgerade durch den Wendepunkt  $P$  schließt mit dem Graphen von  $f$  die grün schraffierte Fläche mit dem Inhalt  $A$  ein. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt  $A$  .

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = (x - 1) \cdot e^x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} .$$

(Der Graph ist auch nochmals auf dem Arbeitsblatt angegeben.)

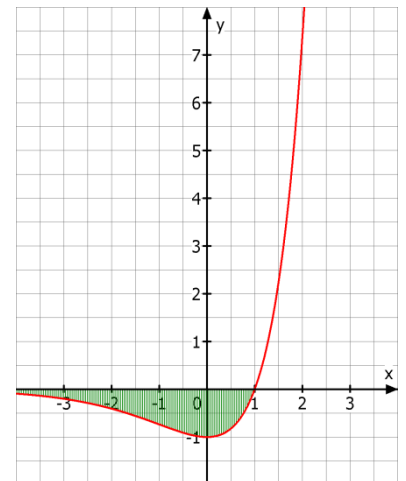
a) Zeigen Sie, dass  $F(x) = (x - 2) \cdot e^x$  eine Stammfunktion von

$$f \text{ ist und dass für } a < 1 \text{ gilt: } \int_a^1 f(x) \, dx = (2 - a) \cdot e^a - e .$$

b) Der Graph von  $f$  und die  $x$ -Achse schließen eine sich ins Unendliche erstreckende, im Bild grün schraffierte Fläche mit dem endlichen Inhalt  $A$  ein.

Berechnen Sie diesen Flächeninhalt  $A$  .

(Hinweis:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) = 0$  darf verwendet werden.)



c) Begründen Sie, dass es genau ein  $k > 1$  mit der folgenden Eigenschaft gibt:  $\int_{-1}^k f(x) \, dx = 0$  .

Schätzen Sie den Wert von  $k$  ab. Erläutern Sie Ihre Abschätzung auf dem Arbeitsblatt durch geeignete Eintragungen.

d) Berechnen Sie den Wert von  $\int_1^2 f(x) \, dx$  . Begründen Sie nun, ob  $k \geq 2$  oder  $k < 2$  gilt.

Aufgabe	1a	b	2a	b	3a	b	c	d	Summe
Punkte	3	4	7	7	4	3	3	4	35



Gutes Gelingen! G.R.

**Q12 \* Mathematik m4 \* Klausur am 12.11.2012 \* Gruppe A \* Lösung**

1. a)  $\int_{-1}^2 2x^3 - x \, dx = \left[ \frac{2x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \left[ \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = (8-2) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 6$

b)  $\int_1^9 0,5 \cdot \sqrt{x} \, dx = \int_1^9 0,5 \cdot x^{0,5} \, dx = \left[ 0,5 \cdot \frac{x^{1,5}}{1,5} \right]_1^9 = \left[ \frac{x^{1,5}}{3} \right]_1^9 = 3 \cdot 3 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

2. a)  $f(x) = \frac{5x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{5 \cdot (x^2+1) - 5x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2}$  und

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-10x) - (5-5x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1) \cdot (-10x) - (5-5x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^3} =$$

$$\frac{-10x^3 - 10x - (20x - 20x^3)}{(x^2+1)^3} = \frac{10x^3 - 30x}{(x^2+1)^3} = \frac{10x \cdot (x^2 - 3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 10x \cdot (x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_{2/3} = \pm \sqrt{3}$

Da  $f''(x)$  an allen drei Stellen das Vorzeichen wechselt, besitzt  $G_f$  an diesen drei Stellen jeweils einen Wendepunkt.

$P(\sqrt{3}; f(\sqrt{3})) \dots$

b) Ursprungsgerade:  $P(\sqrt{3}; f(\sqrt{3})) = P(\sqrt{3}; \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{4}) \Rightarrow g(x) = \frac{5}{4}x$

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} f(x) - g(x) \, dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{5x}{x^2+1} - \frac{5x}{4} \, dx = 2 \cdot \left[ \frac{5}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{5x^2}{8} \right]_{-0}^{\sqrt{3}} =$$

$$5 \cdot \ln(3+1) - \frac{5 \cdot 3}{4} - (5 \cdot \ln(1) - 0) = 5 \cdot \ln(4) - \frac{15}{4} - 0 = 5 \cdot \ln(4) - \frac{15}{4} \approx 3,18$$

3. a)  $F(x) = (x-2) \cdot e^x \Rightarrow F'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x = (x-1) \cdot e^x = f(x)$ , also ist  $F$  Stammfunktion von  $f$ .

$$\int_a^1 f(x) \, dx = \left[ (x-2) \cdot e^x \right]_a^1 = -1 \cdot e^1 - ((a-2) \cdot e^a) = (2-a) \cdot e^a - e$$

b)  $A = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 f(x) \, dx = - \lim_{a \rightarrow -\infty} ((2-a) \cdot e^a - e) = - \lim_{a \rightarrow -\infty} (2 \cdot e^a - a \cdot e^a - e) =$   
 $- (0 - 0 - e) = e$

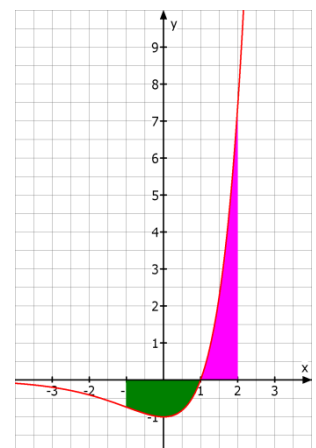
c)  $\int_{-1}^1 f(x) \, dx < 0$  und  $\int_{-1}^x f(x) \, dx$  ist für  $x > 1$  streng monoton

wachsend, d.h. es gibt ein  $k \approx 2$  mit  $\int_{-1}^k f(x) \, dx = 0$

Grüne und lila Flächen haben etwa gleichen Inhalt.

d)  $\int_1^2 f(x) \, dx = \left[ (x-2) \cdot e^x \right]_1^2 = 0 - (-1 \cdot e^1) = e = A$  aus Aufgabe b.

Die lila Fläche ist also größer als die grüne und damit  $k < 2$ .



**Q12 \* Mathematik m4 \* Klausur am 12.11.2012 \* Gruppe B \* Lösung**

1. a)  $\int_{-2}^1 2x^3 - x \, dx = \left[ \frac{2x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \left[ \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - (8 - 2) = -6$

b)  $\int_4^9 0,5 \cdot \sqrt{x} \, dx = \int_4^9 0,5 \cdot x^{0,5} \, dx = \left[ 0,5 \cdot \frac{x^{1,5}}{1,5} \right]_4^9 = \left[ \frac{x^{1,5}}{3} \right]_4^9 = 3 \cdot 3 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$

2. a)  $f(x) = \frac{3x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2+1) - 3x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$  und

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-6x) - (3 - 3x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1) \cdot (-6x) - (3 - 3x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^3} =$$

$$\frac{-6x^3 - 6x - (12x - 12x^3)}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2+1)^3} = \frac{6x \cdot (x^2 - 3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x \cdot (x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_{2/3} = \pm \sqrt{3}$$

Da  $f''(x)$  an allen drei Stellen das Vorzeichen wechselt, besitzt  $G_f$  an diesen drei Stellen jeweils einen Wendepunkt.

$$P(\sqrt{3} ; f(\sqrt{3})) \dots$$

b) Ursprungsgerade:  $P(\sqrt{3} ; f(\sqrt{3})) = P(\sqrt{3} ; \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}) \Rightarrow g(x) = \frac{3}{4}x$

$$A = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} f(x) - g(x) \, dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x}{x^2+1} - \frac{3x}{4} \, dx = 2 \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{3x^2}{8} \right]_{-0}^{\sqrt{3}} =$$

$$3 \cdot \ln(3+1) - \frac{3 \cdot 3}{4} - (3 \cdot \ln(1) - 0) = 3 \cdot \ln(4) - \frac{9}{4} - 0 = 3 \cdot \ln(4) - \frac{9}{4} \approx 1,91$$

3. a)  $F(x) = (x-2) \cdot e^x \Rightarrow F'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x = (x-1) \cdot e^x = f(x)$ ,  
also ist  $F$  Stammfunktion von  $f$ .

$$\int_a^1 f(x) \, dx = \left[ (x-2) \cdot e^x \right]_a^1 = -1 \cdot e^1 - ((a-2) \cdot e^a) = (2-a) \cdot e^a - e$$

b)  $A = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 f(x) \, dx = - \lim_{a \rightarrow -\infty} ((2-a) \cdot e^a - e) = - \lim_{a \rightarrow -\infty} (2 \cdot e^a - a \cdot e^a - e) =$   
 $- (0 - 0 - e) = e$

c)  $\int_{-1}^1 f(x) \, dx < 0$  und  $\int_{-1}^x f(x) \, dx$  ist für  $x > 1$  streng monoton

wachsend, d.h. es gibt ein  $k \approx 2$  mit  $\int_{-1}^k f(x) \, dx = 0$

Grüne und lila Flächen haben etwa gleichen Inhalt.

d)  $\int_1^2 f(x) \, dx = \left[ (x-2) \cdot e^x \right]_1^2 = 0 - (-1 \cdot e^1) = e = A$  aus Aufgabe b.

Die lila Fläche ist also größer als die grüne und damit  $k < 2$ .

