

## Q12 \* Mathematik \* Integralrechnungen

1. Geben Sie jeweils genau an, was das „Integral“ bedeutet.  
Benennen und bestimmen Sie dieses Integral.

a)  $\int_0^3 3x^2 - 2 \, dx$       b)  $\int_{-1}^{+1} 3x^2 - 2 \, dx$       c)  $\int_1^x 3t^2 - 2 \, dt$



2. Berechne das bestimmte Integral.

a)  $\int_1^3 x^2 - x \, dx$       b)  $\int_1^2 3x^2 - \frac{2}{x^2} \, dx$       c)  $\int_1^4 3 \cdot \sqrt{x} + 1 \, dx$   
d)  $\int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx$       e)  $\int_1^e \frac{3}{2x} \, dx$       f)  $\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} \, dx$   
g)  $\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2} \, dx$       h)  $\int_{-1}^{+1} 2e^x \, dx$       i)  $\int_0^2 2e^{0,5x} \, dx$   
j)  $\int_0^2 3e^{-x} \, dx$       k)  $\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx$       l)  $\int_0^\pi 2 \cos x \, dx$   
m)  $\int_0^\pi \cos \frac{x}{2} \, dx$       n)  $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$       o)  $\int_0^{0,5} 2 \cdot \sin(\pi \cdot x) \, dx$



## Q12 \* Mathematik \* Integralrechnungen

1. Geben Sie jeweils genau an, was das „Integral“ bedeutet.  
Benennen und bestimmen Sie dieses Integral.

a)  $\int_0^3 3x^2 - 2 \, dx$       b)  $\int_{-1}^{+1} 3x^2 - 2 \, dx$       c)  $\int_1^x 3t^2 - 2 \, dt$



2. Berechne das bestimmte Integral.

a)  $\int_1^3 x^2 - x \, dx$       b)  $\int_1^2 3x^2 - \frac{2}{x^2} \, dx$       c)  $\int_1^4 3 \cdot \sqrt{x} + 1 \, dx$   
d)  $\int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx$       e)  $\int_1^e \frac{3}{2x} \, dx$       f)  $\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} \, dx$   
g)  $\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2} \, dx$       h)  $\int_{-1}^{+1} 2e^x \, dx$       i)  $\int_0^2 2e^{0,5x} \, dx$   
j)  $\int_0^2 3e^{-x} \, dx$       k)  $\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx$       l)  $\int_0^\pi 2 \cos x \, dx$   
m)  $\int_0^\pi \cos \frac{x}{2} \, dx$       n)  $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \, dx$       o)  $\int_0^{0,5} 2 \cdot \sin(\pi \cdot x) \, dx$



## Q12 \* Mathematik \* Integralrechnungen \* Lösungen

1. a) Das unbestimmte Integral gibt die Menge aller Stammfunktionen zu  $f(x) = 3x^2 - 2$  an.

$$\int 3x^2 - 2 \, dx = x^3 - 2x + C$$

b) Das bestimmte Integral gibt die Flächenbilanz an und ist so ein konkreter Zahlenwert.

$$\int_{-1}^{+1} 3x^2 - 2 \, dx = \left[ x^3 - 2x \right]_{-1}^{+1} = (1-2) - (-1-(-2)) = -1 - (+1) = -2$$

c) Die so genannte Integralfunktion ist eine Funktion der oberen Grenze  $x$ .

$$\int_1^x 3t^2 - 2 \, dt = \left[ t^3 - 2t \right]_1^x = x^3 - 2x - (1-2) = x^3 - 2x + 1$$



2. Berechne das bestimmte Integral.

$$\text{a) } \int_1^3 x^2 - x \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \left( 9 - \frac{9}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\text{b) } \int_1^2 3x^2 - \frac{2}{x^2} \, dx = \int_1^2 3x^2 - 2 \cdot x^{-2} \, dx = \left[ x^3 - \frac{2x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \left[ x^3 + \frac{2}{x} \right]_1^2 = (8+1) - (1+2) = 6$$

$$\text{c) } \int_1^4 3 \cdot \sqrt{x} + 1 \, dx = \int_1^4 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1 \, dx = \left[ 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} + x \right]_1^4 = (2 \cdot 4 \cdot 2 + 4) - (2 \cdot 1 + 1) = 17$$

$$\text{d) } \int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx = \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[ \frac{2}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]_0^4 = \left[ \frac{1}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left[ \frac{1}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left( \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} \right) - \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

$$\text{e) } \int_1^e \frac{3}{2x} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \left[ \ln|x| \right]_1^e = \frac{3}{2} \cdot (\ln e - \ln 1) = \frac{3}{2} \cdot (1 - 0) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\text{f) } \int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \left[ \ln|1+x^2| \right]_1^2 = \ln 5 - \ln 2 = \ln 2,5 \approx 0,916$$

$$\text{g) } \int_0^3 \frac{3x}{1+x^2} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \left[ \ln|1+x^2| \right]_0^3 = \frac{3}{2} \cdot (\ln 10 - \ln 1) = \frac{3}{2} \cdot \ln 10 \approx 3,45$$

$$\text{h) } \int_{-1}^{+1} 2e^x \, dx = \left[ 2e^x \right]_{-1}^{+1} = 2e - \frac{2}{e} \approx 4,70$$

$$i) \int_0^2 2e^{0,5x} dx = \left[ 2 \cdot \frac{e^{0,5x}}{0,5} \right]_0^2 = \left[ 4 \cdot e^{0,5x} \right]_0^2 = 4e - 4 \cdot 1 = 4 \cdot (e - 1)$$

$$j) \int_0^2 3e^{-x} dx = \left[ 3 \cdot (-e^{-x}) \right]_0^2 = \left[ -\frac{3}{e^x} \right]_0^2 = -\frac{3}{e^2} - \left(-\frac{3}{1}\right) = 3 - \frac{3}{e^2}$$

$$k) \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \left[ e^{x^2} \right]_0^1 = e - 1$$

$$l) \int_0^\pi 2\cos x dx = \left[ 2 \cdot \sin x \right]_0^\pi = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$m) \int_0^\pi \cos \frac{x}{2} dx = \left[ 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \right]_0^\pi = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \sin 0 = 2 \cdot 1 - 0 = 2$$

$$n) \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx = \left[ -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x \right]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos 0\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$o) \int_0^{0,5} 2 \cdot \sin(\pi \cdot x) dx = \left[ -\frac{2}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x) \right]_0^{0,5} = -\frac{2}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{2}{\pi} \cdot \cos 0\right) =$$

$$0 + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

