Q12 * Mathematik * Integralrechnungen

1. Geben Sie jeweils genau an, was das „Integral“ bedeutet.
   Benennen und bestimmen Sie dieses Integral.

   a) $\int 3x^2 - 2\,dx$ b) $\int_{-1}^{+1} 3x^2 - 2\,dx$ c) $\int_{1}^{x} 3t^2 - 2\,dt$

2. Berechne das bestimmte Integral.

   a) $\int_1^3 x^2 - x\,dx$ b) $\int_1^2 3x^2 - \frac{2}{x^2}\,dx$ c) $\int_1^4 3\cdot\sqrt{x} + 1\,dx$

   d) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ e) $\int_1^e \frac{3}{2x}\,dx$ f) $\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

   g) $\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2}\,dx$ h) $\int_{-1}^{+1} 2e^x\,dx$ i) $\int_0^2 2e^{0,5x}\,dx$

   j) $\int_0^2 3e^{-x}\,dx$ k) $\int_0^1 2x\,e^{x^2}\,dx$ l) $\int_0^{\pi} 2\cos x\,dx$

   m) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx$ n) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx$ o) $\int_0^{0,5} 2\cdot\sin(\pi\cdot x)\,dx$

Q12 * Mathematik * Integralrechnungen * Lösungen

1. a) Das unbestimmte Integral gibt die Menge aller Stammfunktionen zu $f(x) = 3x^2 - 2$ an.

$$\int 3x^2 - 2\,dx = x^3 - 2x + C$$

b) Das bestimmte Integral gibt die Flächenbilanz an und ist so ein konkreter Zahlenwert.

$$\int_{-1}^{+1} 3x^2 - 2\,dx = \left[\, x^3 - 2x \,\right]_{-1}^{+1} = (1-2) - (-1-(-2)) = -1 - (+1) = -2$$

c) Die so genannte Integralfunktion ist eine Funktion der oberen Grenze x.

$$\int_{1}^{x} 3t^2 - 2\,dt = \left[\, t^3 - 2t \,\right]_{1}^{x} = x^3 - 2x - (1-2) = x^3 - 2x + 1$$

2. Berechne das bestimmte Integral.

a) $$\int_1^3 x^2 - x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = (9 - \frac{9}{2}) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = 4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

b) $$\int_1^2 3x^2 - \frac{2}{x^2}\,dx = \int_1^2 3x^2 - 2\cdot x^{-2}\,dx = \left[x^3 - \frac{2x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \left[x^3 + \frac{2}{x} \right]_1^2 =$$
$$(8+1) - (1+2) = 6$$

c) $$\int_1^4 3\cdot\sqrt{x} + 1\,dx = \int_1^4 3\cdot x^{\frac{1}{2}} + 1\,dx = \left[2\cdot x^{\frac{3}{2}} + x \right]_1^4 = (2\cdot 4\cdot 2 + 4) - (2\cdot 1 + 1) = 17$$

d) $$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]_0^4 = \left[\frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 =$$
$$\left[\frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = (\frac{1}{3}\cdot 9\cdot\sqrt{9}) - (\frac{1}{3}\cdot 1) = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

e) $$\int_1^e \frac{3}{2x}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\left[\, \ln|x| \,\right]_1^e = \frac{3}{2}\cdot(\ln e - \ln 1) = \frac{3}{2}\cdot(1 - 0) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

f) $$\int_1^2 \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = \left[\, \ln\left|1+x^2\right| \,\right]_1^2 = \ln 5 - \ln 2 = \ln 2{,}5 \approx 0{,}916$$

g) $$\int_0^3 \frac{3x}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int_0^3 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\left[\, \ln\left|1+x^2\right| \,\right]_0^3 = \frac{3}{2}\cdot(\ln 10 - \ln 1) = \frac{3}{2}\cdot\ln 10 \approx 3{,}45$$

h) $$\int_{-1}^{+1} 2e^x\,dx = \left[\, 2e^x \,\right]_{-1}^{+1} = 2e - \frac{2}{e} \approx 4{,}70$$

i) $\int_0^2 2e^{0,5x}\, dx = \left[2\cdot\frac{e^{0,5x}}{0,5} \right]_0^2 = \left[4\cdot e^{0,5x} \right]_0^2 = 4e - 4\cdot 1 = 4\cdot(e-1)$

j) $\int_0^2 3e^{-x}\, dx = \left[3\cdot(-e^{-x}) \right]_0^2 = \left[-\frac{3}{e^x} \right]_0^2 = -\frac{3}{e^2} - (-\frac{3}{1}) = 3 - \frac{3}{e^2}$

k) $\int_0^1 2x\, e^{x^2}\, dx = \left[e^{x^2} \right]_0^1 = e - 1$

l) $\int_0^{\pi} 2\cos x\, dx = \left[2\cdot\sin x \right]_0^{\pi} = 2\cdot 0 - 2\cdot 0 = 0$

m) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx = \left[2\cdot\sin\frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = 2\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 2\cdot\sin 0 = 2\cdot 1 - 0 = 2$

n) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\cdot(-\cos\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}\cdot(-\cos 0) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

o) $\int_0^{0,5} 2\cdot\sin(\pi\cdot x)\, dx = \left[\frac{2}{\pi}\cdot(-\cos(\pi\cdot x)) \right]_0^{0,5} = \frac{2}{\pi}\cdot(-\cos(\frac{\pi}{2})) - \frac{2}{\pi}\cdot(-\cos 0) =$

$0 + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$