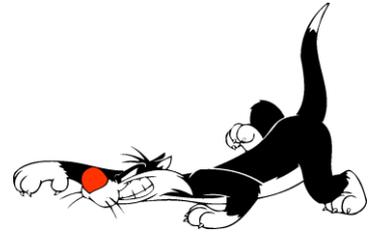


Q12 * Mathematik * Geraden im \mathbb{R}^3



1. Gegeben sind die drei Geraden g , h und k in der so genannten Punkt-Richtungsform.

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie, dass sich g und h in einem Punkt S schneiden, und bestimmen Sie die Koordinaten von S .
- b) Zeigen Sie, dass g und k windschief zueinander sind.
- c) Bestimmen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden g und k zueinander. (Hinweis: Es gibt eine Strecke $[PQ]$, deren Endpunkte P und Q auf g bzw. k liegen, und die senkrecht zu g und k liegt. Die Streckenlänge von $[PQ]$ entspricht dem gesuchten Abstand.)
2. Die Gerade AB zu den Punkten $A(1/2/3)$ und $B(3/-2/1)$ schneidet die x_1x_3 -Ebene in einem Punkt P . Bestimmen Sie die Koordinaten von P .
3. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(8/4/7)$ von der Geraden AB mit den Punkten $A(1/2/3)$ und $B(7/6/-1)$.

4. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(4/4/-3)$.

- a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden h , die parallel zu g im Abstand 6 verläuft.
- b) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden k , die g senkrecht schneidet und durch den Punkt P geht.



Q12 * Mathematik * Geraden im \mathbb{R}^3 * Lösungen

1. a) $g \cap h: \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = -2 \text{ und } s = -1 \text{ und } S(1/-2/3)$

b) $g \cap k: \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt zu einem Widerspruch! Also $g \cap k = \{\}$

c) $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Der Ansatz $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $r = 1, q = -1, t = -1$

und damit $P(7/1/0)$ und $Q(5/0/-5)$ und $\overline{PQ} = |-1 \cdot \vec{n}| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

2. $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder "schöner" $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für die x_1x_3 -Ebene gilt: $x_2 = 0$, also $P(p_1/0/p_3)$ und damit

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 1 \text{ und } P(2/0/2)$$



3. $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ oder "schöner" $AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Projektion von \overline{AP} auf \overline{AB} liefert $\overline{AF} = \frac{\overline{AP} \circ \overline{AB}}{\overline{AB}^2} \cdot \overline{AB}$ mit $\overline{AP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overline{AF} = \frac{7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-4)}{36 + 16 + 16} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{34}{68} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ also}$$

$$\vec{F} = \vec{A} + \overline{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und Abstand } d = \overline{FP} = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+0+36} = \sqrt{52} = 2 \cdot \sqrt{13}$$

4.a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = 3$ also $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Für den Fußpunkt F des Lots von P auf g gilt $\overline{PF} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, also (mit $F \in g$)

$$0 = \begin{pmatrix} 4+s-4 \\ 1+2s-4 \\ 3-2s+3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = s+4s-6+4s-12 = 9s-18 \Rightarrow s=2 \text{ und } \vec{F} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 1+2 \cdot 2 \\ 3-2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$k: \vec{X} = \vec{P} + q \cdot \overline{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 6-4 \\ 5-4 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

