

1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 * m3 * 20.10.2015
Gruppe A



1. Berechnen Sie die bestimmten Integrale

a) $\int_1^5 \sqrt{2x-1} \, dx$

b) $\int_0^2 \frac{6x}{x^2+1} \, dx$

c) $\int_0^\pi 4 \sin(0,5x) \, dx$

2. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\int 5x \cdot (x-2) \, dx$

b) $\int 4x \cdot e^{x^2} \, dx$

3. Gesucht ist eine möglichst einfache Funktion f mit folgenden beiden Eigenschaften:

$$\int_{-k}^k f(x) \, dx = 0 \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad f(1) = 2 .$$

Geben Sie einen passenden Funktionsterm $f(x)$ an.

4. Peter behauptet, dass die angegebene Integralfunktion $I(x)$ einen Hochpunkt besitzt. Prüfen Sie Peters Behauptung und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Hochpunktes an.

$$I(x) = \int_1^x 2t - t^2 \, dt$$

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	3	4	Summe
Punkte	4	4	4	3	2	3	5	25



1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 * m3 * 20.10.2015
Gruppe B



1. Berechnen Sie die bestimmten Integrale

a) $\int_1^{2,5} \sqrt{2x-1} \, dx$

b) $\int_0^3 \frac{4x}{x^2+1} \, dx$

c) $\int_0^{\pi} 2 \sin(0,5x) \, dx$

2. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\int 2x \cdot (x-5) \, dx$

b) $\int 6x \cdot e^{x^2} \, dx$

3. Gesucht ist eine möglichst einfache Funktion f mit folgenden beiden Eigenschaften:

$$\int_{-k}^k f(x) \, dx = 0 \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad f(1) = 3 .$$

Geben Sie einen passenden Funktionsterm $f(x)$ an.

4. Petra behauptet, dass die angegebene Integralfunktion $I(x)$ einen Hochpunkt besitzt. Prüfen Sie Petras Behauptung und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Hochpunktes an.

$$I(x) = \int_1^x 3t - t^2 \, dt$$

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	3	4	Summe
Punkte	4	4	4	3	2	3	5	25



1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 * m3 * 20.10.2015
Gruppe A * Lösung



$$1. a) \int_1^5 \sqrt{2x-1} dx = \int_1^5 (2x-1)^{1/2} dx = \left[\frac{(2x-1)^{3/2}}{3} \right]_1^5 = \frac{9^{3/2}}{3} - \frac{1^{3/2}}{3} = \frac{9 \cdot 3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

$$b) \int_0^2 \frac{6x}{x^2+1} dx = \left[3 \cdot \ln(x^2+1) \right]_0^2 = 3 \cdot \ln 5 - 3 \cdot \ln 1 = 3 \cdot \ln 5$$

$$c) \int_0^\pi 4 \sin(0,5x) dx = \left[-8 \cdot \cos(0,5x) \right]_0^\pi = 0 - (-8 \cdot 1) = 8$$

$$2. a) \int 5x \cdot (x-2) dx = \int 5x^2 - 10x dx = \frac{5x^3}{3} - 5x^2 + C$$

$$b) \int 4x \cdot e^{x^2} dx = 2 \cdot e^{x^2} + C$$

$$3. \int_{-k}^k f(x) dx = 0 \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und } f(1) = 2 .$$

Die Funktion f muss punktsymmetrisch zum Ursprung liegen, damit das bestimmte Integral den Wert 0 besitzt. Wegen $f(1) = 2$ passen damit Funktionsterme wie z.B. $f(x) = 2x$ oder $f(x) = 2x^3$ oder $f(x) = 2x^5$

4. Peters Behauptung stimmt. Nach dem HDI gilt

$$I'(x) = 2x - x^2 = x \cdot (2-x) \quad \text{und} \quad I'(x) = 0 \quad \text{für } x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

An der Stelle $x_2 = 2$ ändert $I'(x)$ das Vorzeichen von $+$ auf $-$, d.h. an dieser Stelle besitzt I einen Hochpunkt.

$$I(2) = \int_1^2 2t - t^2 dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{also} \quad \text{HOP} \left(2 / \frac{2}{3} \right)$$

1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 * m3 * 20.10.2015
Gruppe B * Lösung



$$1. \text{ a) } \int_1^{2.5} \sqrt{2x-1} \, dx = \int_1^{2.5} (2x-1)^{1/2} \, dx = \left[\frac{(2x-1)^{3/2}}{3} \right]_1^{2.5} = \frac{4^{3/2}}{3} - \frac{1^{3/2}}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{b) } \int_0^3 \frac{4x}{x^2+1} \, dx = \left[2 \cdot \ln(x^2+1) \right]_0^3 = 2 \cdot \ln 10 - 2 \cdot \ln 1 = 2 \cdot \ln 10$$

$$\text{c) } \int_0^{\pi} 2 \sin(0,5x) \, dx = \left[-4 \cdot \cos(0,5x) \right]_0^{\pi} = 0 - (-4 \cdot 1) = 4$$

$$2. \text{ a) } \int 2x \cdot (x-5) \, dx = \int 2x^2 - 10x \, dx = \frac{2x^3}{3} - 5x^2 + C$$

$$\text{b) } \int 6x \cdot e^{x^2} \, dx = 3 \cdot e^{x^2} + C$$

$$3. \int_{-k}^k f(x) \, dx = 0 \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und } f(1) = 3.$$

Die Funktion f muss punktsymmetrisch zum Ursprung liegen, damit das bestimmte Integral den Wert 0 besitzt. Wegen $f(1) = 3$ passen damit Funktionsterme wie z.B.
 $f(x) = 3x$ oder $f(x) = 3x^3$ oder $f(x) = 3x^5$

4. Petras Behauptung stimmt. Nach dem HDI gilt

$$I'(x) = 3x - x^2 = x \cdot (3-x) \quad \text{und} \quad I'(x) = 0 \quad \text{für } x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

An der Stelle $x_2 = 3$ ändert $I'(x)$ das Vorzeichen von $+$ auf $-$, d.h. an dieser Stelle besitzt I einen Hochpunkt.

$$I(3) = \int_1^3 3t - t^2 \, dt = \left[\frac{3 \cdot t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_1^3 = \frac{27}{2} - 9 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{also HOP} \left(3 / \frac{10}{3} \right)$$