1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 * m3 * 20.10.2015
Gruppe A

1. Berechnen Sie die bestimmten Integrale

   a) $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx$ b) $\int_0^2 \frac{6x}{x^2+1}\,dx$ c) $\int_0^\pi 4\sin(0{,}5x)\,dx$

2. Ermittlen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

   a) $\int 5x\cdot(x-2)\,dx$ b) $\int 4x\cdot e^{x^2}\,dx$

3. Gesucht ist eine möglichst einfache Funktion f mit folgenden beiden Eigenschaften:

   $\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 0$ für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ und $f(1) = 2$.

   Geben Sie einen passenden Funktionsterm $f(x)$ an.

4. Peter behauptet, dass die angegebene Integralfunktion $I(x)$ einen Hochpunkt besitzt. Prüfen Sie Peters Behauptung und geben Sie gegebenenfalls die Koordianten des Hochpunktes an.

   $I(x) = \int_1^x 2t - t^2\,dt$

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	3	4	Summe
Punkte	4	4	4	3	2	3	5	25

1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 * m3 * 20.10.2015 Gruppe B

1. Berechnen Sie die bestimmten Integrale

   a) $\int_{1}^{2,5} \sqrt{2x-1}\, dx$ b) $\int_{0}^{3} \frac{4x}{x^2+1}\, dx$ c) $\int_{0}^{\pi} 2\sin(0,5x)\, dx$

2. Ermittlen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

   a) $\int 2x\cdot(x-5)\, dx$ b) $\int 6x\cdot e^{x^2}\, dx$

3. Gesucht ist eine möglichst einfache Funktion f mit folgenden beiden Eigenschaften:

   $\int_{-k}^{k} f(x)\, dx = 0$ für jedes $k\in\mathbb{R}^+$ und $f(1) = 3$.

   Geben Sie einen passenden Funktionsterm $f(x)$ an.

4. Petra behauptet, dass die angegebene Integralfunktion $I(x)$ einen Hochpunkt besitzt. Prüfen Sie Petras Behauptung und geben Sie gegebenenfalls die Koordianten des Hochpunktes an.

   $I(x) = \int_{1}^{x} 3t - t^2\, dt$

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	3	4	Summe
Punkte	4	4	4	3	2	3	5	25

1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 * m3 * 20.10.2015
Gruppe A * Lösung

1. a) $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx = \int_1^5 (2x-1)^{1/2}\,dx = \left[\frac{(2x-1)^{3/2}}{3}\right]_1^5 = \frac{9^{3/2}}{3} - \frac{1^{3/2}}{3} = \frac{9\cdot 3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

   b) $\int_0^2 \frac{6x}{x^2+1}\,dx = \left[\,3\cdot\ln(x^2+1)\,\right]_0^2 = 3\cdot\ln 5 - 3\cdot\ln 1 = 3\cdot\ln 5$

   c) $\int_0^{\pi} 4\sin(0{,}5x)\,dx = \left[-8\cdot\cos(0{,}5x)\right]_0^{\pi} = 0-(-8\cdot 1) = 8$

2. a) $\int 5x\cdot(x-2)\,dx = \int 5x^2-10x\,dx = \frac{5x^3}{3} - 5x^2 + C$

   b) $\int 4x\cdot e^{x^2}\,dx = 2\cdot e^{x^2} + C$

3. $\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 0$ für jedes $k\in\mathbb{R}^+$ und $f(1)=2$.

   Die Funktion f muss punktsymmetrisch zum Ursprung liegen, damit das bestimmte Integral den Wert 0 besitzt. Wegen $f(1) = 2$ passen damit Funkionsterme wie z.B.
   $f(x) = 2x$ oder $f(x) = 2x^3$ oder $f(x) = 2x^5$ .....

4. Peters Behauptung stimmt. Nach dem HDI gilt
   $I'(x) = 2x - x^2 = x\cdot(2-x)$ und $I'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$
   An der Stelle $x_2 = 2$ ändert $I'(x)$ das Vorzeichen von $+$ auf $-$, d.h. an dieser Stelle besitzt I einen Hochpunkt.
   $I(2) = \int_1^2 2t - t^2\,dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = 4 - \frac{8}{3} - (1-\frac{1}{3}) = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$ also $HOP(2\,/\,\frac{2}{3})$

1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Q12 * m3 * 20.10.2015
Gruppe B * Lösung

1. a) $\int_1^{2,5} \sqrt{2x-1}\ dx = \int_1^{2,5} (2x-1)^{1/2}\ dx = \left[\frac{(2x-1)^{3/2}}{3}\right]_1^{2,5} = \frac{4^{3/2}}{3} - \frac{1^{3/2}}{3} = \frac{4\cdot 2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

   b) $\int_0^3 \frac{4x}{x^2+1}\ dx = \left[\ 2\cdot\ln(x^2+1)\ \right]_0^3 = 2\cdot\ln 10 - 2\cdot\ln 1 = 2\cdot\ln 10$

   c) $\int_0^{\pi} 2\sin(0{,}5x)\ dx = \left[-4\cdot\cos(0{,}5x)\right]_0^{\pi} = 0 - (-4\cdot 1) = 4$

2. a) $\int 2x\cdot(x-5)\ dx = \int 2x^2 - 10x\ dx = \frac{2x^3}{3} - 5x^2 + C$

   b) $\int 6x\cdot e^{x^2}\ dx = 3\cdot e^{x^2} + C$

3. $\int_{-k}^{k} f(x)\ dx = 0$ für jedes $k \in R^+$ und $f(1) = 3$.

   Die Funktion f muss punktsymmetrisch zum Ursprung liegen, damit das bestimmte Integral den Wert 0 besitzt. Wegen $f(1) = 3$ passen damit Funkionsterme wie z.B. $f(x) = 3x$ oder $f(x) = 3x^3$ oder $f(x) = 3x^5$ .....

4. Petras Behauptung stimmt. Nach dem HDI gilt

   $I'(x) = 3x - x^2 = x\cdot(3-x)$ und $I'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

   An der Stelle $x_2 = 3$ ändert $I'(x)$ das Vorzeichen von $+$ auf $-$, d.h. an dieser Stelle besitzt I einen Hochpunkt.

   $I(3) = \int_1^3 3t - t^2\ dt = \left[\frac{3\cdot t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{2} - 9 - (\frac{3}{2} - \frac{1}{3}) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ also $HOP(3\ /\ \frac{10}{3})$