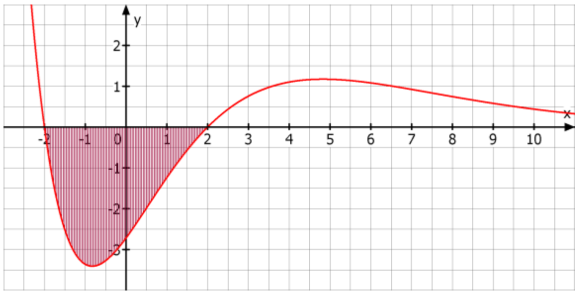
Q12 * Mathematik m4 * (Letzte) Extemporale am 24.04.2013

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (0{,}25x^2 - 1) \cdot e^{1-0{,}5x}$.

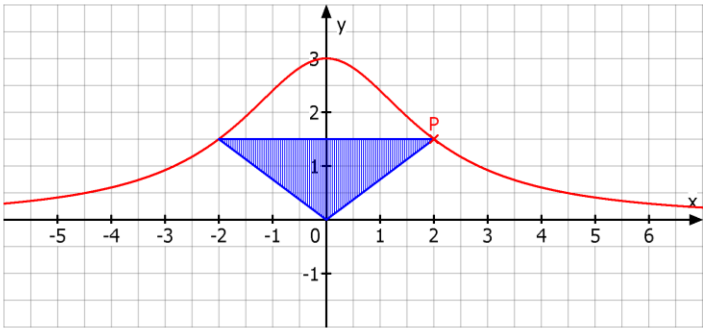


a) Bestimmen Sie das Intervall, in dem f streng monoton steigend ist.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Probeansatzes $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{1-0{,}5x}$ eine Stammfunktion von f.
[Ergebnis: $F(x) = -(0{,}5x^2 + 2x + 2) \cdot e^{1-0{,}5x}$]

c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{6}{2 + 0{,}5x^2}$.



Der Ursprung (0/0) und ein Punkt P des Graphen von f legen ein gleichschenkliges Dreieck fest, dessen Basis parallel zur x-Achse verläuft.

Zeigen Sie, dass es unter diesen Dreiecken eines mit maximalem Flächeninhalt gibt. Bestimmen Sie diesen maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe	1a	b	c	2	Summe
Punkte	5	6	3	8	22

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m4 * (Letzte) Extemporale am 24.04.2013 * Lösung

1. a) $f(x) = (0{,}25x^2 - 1)\cdot e^{1-0{,}5x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 0{,}5x\cdot e^{1-0{,}5x} + (0{,}25x^2 - 1)\cdot e^{1-0{,}5x}\cdot(-0{,}5)$

$f'(x) = [0{,}5x - 0{,}125x^2 + 0{,}5]\cdot e^{1-0{,}5x} = 0{,}125\cdot(-x^2 + 4x + 4)\cdot e^{1-0{,}5x}$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 4x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{-2}\cdot(-4 \pm \sqrt{16 + 4\cdot 4}) = 2 \mp 2\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + 2\sqrt{2}$ und

f streng monoton steigend in $[2 - 2\sqrt{2}\,;\, 2 + 2\sqrt{2}\,]$

b) $F(x) = (ax^2 + bx + c)\cdot e^{1-0{,}5x} \Rightarrow F'(x) = (2ax + b)\cdot e^{1-0{,}5x} + (ax^2 + bx + c)\cdot e^{1-0{,}5x}\cdot(-0{,}5)$

$F'(x) = [2ax + b - 0{,}5ax^2 - 0{,}5bx - 0{,}5c]\cdot e^{1-0{,}5x}$

$F'(x) = [-0{,}5ax^2 + (2a - 0{,}5b)x + b - 0{,}5c]\cdot e^{1-0{,}5x} \overset{!}{=} f(x) = (0{,}25x^2 - 1)\cdot e^{1-0{,}5x} \;\Rightarrow$

$-0{,}5a = 0{,}25$ und $(2a - 0{,}5b) = 0$ und $b - 0{,}5c = -1 \;\Rightarrow$

$a = -0{,}5$ und $b = 4a = -2$ und $c = 2 + 2b = -2$ also $F(x) = (-0{,}5x^2 - 2x - 2)\cdot e^{1-0{,}5x}$

c) $A = \left|\int_{-2}^{+2} f(x)\,dx\right| = -\left[F(x)\right]_{-2}^{2} = \left[\,(0{,}5x^2 + 2x + 2)\cdot e^{1-0{,}5x}\,\right]_{-2}^{+2}$ also

$A = (2+4+2)\cdot e^0 - (2-4+2)\cdot e^2 = 8$

2. $f(x) = \dfrac{6}{2 + 0{,}5x^2}$ und $A = A(x_P) = x_P\cdot f(x_P) = \dfrac{6\cdot x_P}{2 + 0{,}5x_P^{\,2}}$ mit $P(x_P\,/\,f(x_P))$ und $x_P \geq 0$

$A(x) = x\cdot f(x) = \dfrac{6x}{2 + 0{,}5x^2}$ und $A'(x) = \dfrac{6\cdot(2 + 0{,}5x^2) - 6x\cdot x}{(2 + 0{,}5x^2)^2} = \dfrac{12 - 3x^2}{(2 + 0{,}5x^2)^2}$

$A'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12 - 3x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = x_P = 2$

$A'(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq 2$ und $A'(x) \leq 0$ für $2 \leq x \;\Rightarrow$

$A(x_P)$ ist maximal für $x_P = 2$ und $A_{max} = A(2) = \dfrac{6\cdot 2}{2 + 0{,}5\cdot 2^2} = \dfrac{12}{4} = 3$.