

Q12 * Mathematik m4 * (Letzte) Extemporale am 24.04.2013

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (0,25x^2 - 1) \cdot e^{1-0,5x}$.

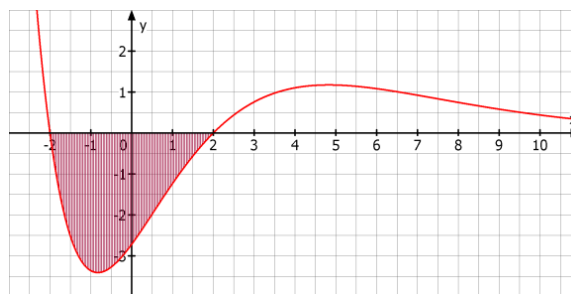
a) Bestimmen Sie das Intervall, in dem f streng monoton steigend ist.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Probeansatzes

$F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{1-0,5x}$ eine Stammfunktion von f .

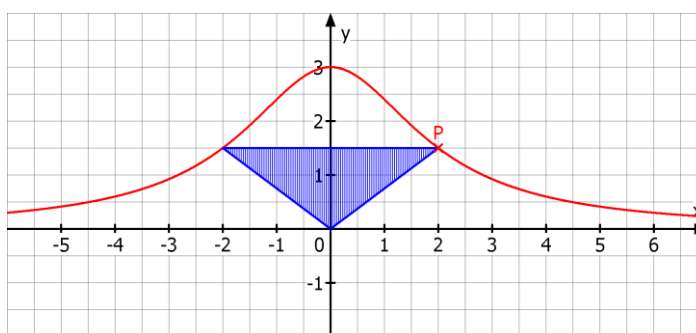
[Ergebnis: $F(x) = -(0,5x^2 + 2x + 2) \cdot e^{1-0,5x}$]

c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.



2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{6}{2 + 0,5x^2}$.

Der Ursprung (0/0) und ein Punkt P des Graphen von f legen ein gleichschenkliges Dreieck fest, dessen Basis parallel zur x -Achse verläuft.



Zeigen Sie, dass es unter diesen Dreiecken eines mit maximalem Flächeninhalt gibt. Bestimmen Sie diesen maximalen Flächeninhalt.

Aufgabe	1a	b	c	2	Summe
Punkte	5	6	3	8	22



Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m4 * (Letzte) Extemporale am 24.04.2013 * Lösung

1. a) $f(x) = (0,25x^2 - 1) \cdot e^{1-0,5x} \Rightarrow f'(x) = 0,5x \cdot e^{1-0,5x} + (0,25x^2 - 1) \cdot e^{1-0,5x} \cdot (-0,5)$

$$f'(x) = [0,5x - 0,125x^2 + 0,5] \cdot e^{1-0,5x} = 0,125 \cdot (-x^2 + 4x + 4) \cdot e^{1-0,5x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{-2} \cdot (-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 4}) = 2 \mp 2\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + 2\sqrt{2} \quad \text{und}$$

$$f \text{ streng monoton steigend in } [2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}]$$

b) $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{1-0,5x} \Rightarrow F'(x) = (2ax + b) \cdot e^{1-0,5x} + (ax^2 + bx + c) \cdot e^{1-0,5x} \cdot (-0,5)$

$$F'(x) = [2ax + b - 0,5ax^2 - 0,5bx - 0,5c] \cdot e^{1-0,5x}$$

$$F'(x) = [-0,5ax^2 + (2a - 0,5b)x + b - 0,5c] \cdot e^{1-0,5x} \stackrel{!}{=} f(x) = (0,25x^2 - 1) \cdot e^{1-0,5x} \Rightarrow$$

$$-0,5a = 0,25 \quad \text{und} \quad (2a - 0,5b) = 0 \quad \text{und} \quad b - 0,5c = -1 \Rightarrow$$

$$a = -0,5 \quad \text{und} \quad b = 4a = -2 \quad \text{und} \quad c = 2 + 2b = -2 \quad \text{also} \quad F(x) = (-0,5x^2 - 2x - 2) \cdot e^{1-0,5x}$$

c) $A = \left| \int_{-2}^{+2} f(x) dx \right| = -[F(x)]_{-2}^2 = [(0,5x^2 + 2x + 2) \cdot e^{1-0,5x}]_{-2}^2 \quad \text{also}$

$$A = (2+4+2) \cdot e^0 - (2-4+2) \cdot e^2 = 8$$

2. $f(x) = \frac{6}{2 + 0,5x^2}$ und $A = A(x_p) = x_p \cdot f(x_p) = \frac{6 \cdot x_p}{2 + 0,5x_p^2}$ mit $P(x_p / f(x_p))$ und $x_p \geq 0$

$$A(x) = x \cdot f(x) = \frac{6x}{2 + 0,5x^2} \quad \text{und} \quad A'(x) = \frac{6 \cdot (2 + 0,5x^2) - 6x \cdot x}{(2 + 0,5x^2)^2} = \frac{12 - 3x^2}{(2 + 0,5x^2)^2}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = x_p = 2$$

$$A'(x) \geq 0 \text{ f\u00fcr } 0 \leq x \leq 2 \quad \text{und} \quad A'(x) \leq 0 \text{ f\u00fcr } 2 \leq x \Rightarrow$$

$$A(x_p) \text{ ist maximal f\u00fcr } x_p = 2 \quad \text{und} \quad A_{\max} = A(2) = \frac{6 \cdot 2}{2 + 0,5 \cdot 2^2} = \frac{12}{4} = 3.$$

