Q12 * Mathematik * Ebenen im R^3

1. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sind durch die Punkte A(1/2/3), B(3/3/3) und C(5/4/4) bzw. P(3/2/3), Q(2/3/4) und R(6/6/7) festgelegt.
   Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen.

2. Die Ebene E ist durch die drei Punkte A(1/2/3), B(3/6/2) und C(3/1/1) festgelegt.
   Die Gerade g geht durch die beiden Punkte P(2/1/1) und Q(-1/-1/3).
   Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.

3. Die Ebene E ist durch die drei Punkte A(2/-3/4)), B(1/0/2) und C(-2/3/4) festgelegt.
   Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E mit der
   a) x_1x_2-Ebene,
   b) x_1x_3-Ebene,
   c) x_2x_3-Ebene.

4. Die Ebene E ist durch die drei Punkte A(1/0/-2), B(2/2/-2) und C(1/-6/1) festgelegt.
   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch P(1/4/2), welche die Ebene E senkrecht schneidet.
   b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Q12 * Mathematik * Ebenen im R^3

1. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sind durch die Punkte A(1/2/3), B(3/3/3) und C(5/4/4) bzw. P(3/2/3), Q(2/3/4) und R(6/6/7) festgelegt.
   Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen.

2. Die Ebene E ist durch die drei Punkte A(1/2/3), B(3/6/2) und C(3/1/1) festgelegt.
   Die Gerade g geht durch die beiden Punkte P(2/1/1) und Q(-1/-1/3).
   Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E.

3. Die Ebene E ist durch die drei Punkte A(2/-3/4)), B(1/0/2) und C(-2/3/4) festgelegt.
   Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E mit der
   a) x_1x_2-Ebene,
   b) x_1x_3-Ebene,
   c) x_2x_3-Ebene.

4. Die Ebene E ist durch die drei Punkte A(1/0/-2), B(2/2/-2) und C(1/-6/1) festgelegt.
   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch P(1/4/2), welche die Ebene E senkrecht schneidet.
   b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Q12 * Mathematik * Ebenen im R^3 * Lösungen

1. $E_1: \vec{X} = \vec{A} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$

$$E_1 \cap E_2 = g: \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$$

(1) $2r + 4s = 1+t+4u \Rightarrow$ (1´) $2r+4-4t+12u = 1+t+4u \Leftrightarrow 2r = -3+5t-8u$

(2) $r + 2s = 1-t+3u \Rightarrow$ (2´) $r+2-2t+6u = 1-t+3u \Rightarrow r = -1+t-3u$ in (1´)

(3) $s = 1-t+3u$ in (1) und (2)

(1´´) $-2+2t-6u = -3+5t-8u \Leftrightarrow 1+2u = 3t \Leftrightarrow u = 1{,}5t-0{,}5$ in E_2 eingesetzt

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + (1{,}5t-0{,}5)\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}6\\4{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1{,}5\\1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\3{,}5\\3{,}5\end{pmatrix}$$

wegen $\begin{pmatrix}7\\3{,}5\\3{,}5\end{pmatrix} = 3{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ schöner $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} + t^*\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, wegen $\begin{pmatrix}0\\1{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in g$

kann man als Aufpunkt von g auch $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ verwenden, also $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t^{**}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

2. $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ und $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$

$$E \cap g = \{S\}: \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

(1) $2r+2s-3t = 1 \Rightarrow$ (1´) $2r+8r-4t+2-3t = 1 \Rightarrow 10r-7t = -1$

(2) $4r - s-2t = -1 \Rightarrow s = 4r-2t+1$ in (1) und (2)

(3) $-r-2s+2t = -2 \Rightarrow$ (3´) $-r-8r+4t-2+2t = -2 \Rightarrow 6t = 9r \Rightarrow t = 1{,}5r$ in (1´)

(1´´) $10r - 10{,}5r = -1 \Rightarrow r = 2$ und $t = 3$ und $s = 4\cdot 2 - 2\cdot 3 + 1 = 3$ und $S(11/7/-5)$

3. a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}$ und $x_1x_2-\text{Ebene}: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$E \cap x_1x_2-\text{Ebene} = g_1$ liefert sofort: (3) $2+2r+2s=0 \Rightarrow s=-1-r$ liefert in E eingesetzt g_1

$$g_1: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + (-1-r)\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\0-3\\2-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1+3\\-3-3\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix}$$

b) $E \cap x_1x_3-\text{Ebene} = g_2$ liefert sofort: $0-3r+3s=0$ also $r=s$ in E eingesetzt:

$$g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$$

c) $E \cap x_2x_3-\text{Ebene} = g_2$ liefert sofort: $1+r-3s=0$ also $r=3s-1$ in E eingesetzt:

$$g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + (3s-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\0+3\\2-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3+3\\3-9\\2+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\8\end{pmatrix}$$

4. $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}$; Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-0\\0-3\\-6-0\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

a) $g: \vec{X} = \vec{P} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

b) $E \cap g = \{S\}: \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

(1) $1+r = 1+2t \Rightarrow r=2t$ in (2) und (3)

(2) $2r-6s = 4-t \Rightarrow 4t-6s = 4-t \Rightarrow 5t = 6s+4 \Rightarrow 5t = 8-4t+4 \Rightarrow 9t = 12 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$

(3) $-2+3s = 2-2t \Rightarrow 3s = 4-2t$ in (2)

also $\vec{S} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + \frac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11/3\\8/3\\-2/3\end{pmatrix}$ und $d(E,P) = |\overrightarrow{SP}| = \left|\begin{pmatrix}-8/3\\4/3\\8/3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{64+16+64} = \frac{12}{3} = 4$