

Q12 * Mathematik * Aufgaben zum bestimmten Integral

1. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und kennzeichnen Sie die angegebene Fläche. Hierbei gibt $[A]_a^b$ den Flächeninhalt an, den G_f und die x-Achse im Intervall $[a;b]$ einschließen. Berechnen Sie den Flächeninhalt und das bestimmte Integral. Achten Sie gegebenenfalls auf den Unterschied.

a) $f(x) = 0,5x + 1$; $[A]_0^2$ und $\int_0^2 f(x) dx$

b) $f(x) = 0,5x + 1$; $[A]_{-4}^2$ und $\int_{-4}^2 f(x) dx$

c) $f(x) = 4 - x^2$; $[A]_0^3$ und $\int_0^3 f(x) dx$



2. Prüfen Sie, ob es Funktionen mit den geforderten Eigenschaften gibt. Es gilt $a > 0$.

a) $f(x)$ mit $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$ und $f(2) = 4$

b) $f(x)$ mit $\int_{-2}^2 f(x) dx = -[A]_{-2}^2$ und $f(0) = -1$

c) $f(x)$ mit $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ und $f(a) \neq 0$

d) $f(x)$ mit $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ und $f(0) \neq 0$

e) $f(x)$ mit $\int_0^a f(x) dx = a$

f) $f(x)$ mit $\int_0^1 f(x)^2 dx = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$

3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

a) $\int_1^2 (0,5x+1) dx$ b) $\int_0^k \frac{x^2 + 2x}{2} dx$ c) $\int_0^3 u \cdot (u+1) du$

d) $\int_1^{\sqrt{3}} (x^3 - 2x) dx$ e) $\int_1^{\sqrt{2}} 5x - 4 dx$ f) $\int_0^3 2u + 1 dx$

4. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 12x)$ soll untersucht werden.

a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen. Skizzieren Sie den Graphen.

b) Berechnen Sie $\int_{-1}^k f(x) dx$ für $k = -2, k = 0, k = 1, k = 2$ und $k = 4$.

Deuten Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.

5. Berechnen Sie das bestimmte Integral $I(k) = \int_0^k 2 - x dx$ allgemein in Abhängigkeit von k .

Für welchen Wert von k nimmt dieses Integral seinen größten Wert an? Deuten Sie diesen Fall geometrisch.

Q12 * Mathematik * Aufgaben zum bestimmten Integral * Lösungen

1. a) $[A]_0^2 = \int_0^2 f(x) dx = 3$ b) $[A]_{-4}^2 = 5$ und $\int_{-4}^2 f(x) dx = 3$

c) $[A]_0^3 = [A]_0^2 + [A]_2^3 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$ und $\int_0^3 f(x) dx = 3 = \frac{16}{3} - \frac{7}{3}$

2. a) z.B. $f(x) = 2x$ oder $f(x) = 0,5x^3$ oder $f(x) = x \cdot |x|$

b) z.B. $f(x) = -1$ oder $f(x) = 1 - 0,25x^2$

c) z.B. $f(x) = x$ oder $f(x) = x^3$

d) schwer! z.B. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}x + 2 & ; \text{ falls } x \leq 0 \\ 2 - \frac{6}{a}x & ; \text{ falls } x > 0 \end{cases}$

e) z.B. $f(x) = \frac{2}{a}x$

f) z.B. $f(x) = 0$ oder $f(x) = 1$



3. a) $\int_1^2 (0,5x+1) dx = 1,75$

b) $\int_0^k \frac{x^2 + 2x}{2} dx = \frac{1}{6}(k^3 + 3k^2)$

c) $\int_0^3 u \cdot (u+1) du = 13,5$

d) $\int_1^{\sqrt{3}} (x^3 - 2x) dx = 0$

e) $\int_1^{\sqrt{2}} 5x - 4 dx = 6,5 - 4\sqrt{2}$

f) $\int_0^3 2u + 1 dx = 6u + 3$

4. a) Punktsymmetrie zum Ursprung; Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm 2\sqrt{3}$

Extrempunkte: $HOP(-2/2)$; $TIP(2/-2)$

Wendepunkt: $WP(0/0)$

b) $\int_{-1}^k f(x) dx = \frac{1}{32}(k^2 - 32) \cdot (k^2 - 1) = I(k)$

$I(-2) = -\frac{57}{32}$; $I(0) = \frac{23}{32}$; $I(1) = 0$; $I(2) = -\frac{57}{32}$

5. $I(k) = \int_0^k 2 - x dx = 2k - 0,5k^2$; $I'(k) = 2 - k$

$I(k)$ ist maximal für $I'(k) = 0$, d.h. für $k=2$.