Q12 * Mathematik * Aufgaben zum bestimmten Integral

1. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und kennzeichnen Sie die angegebene Fläche. Hierbei gibt $[A]_a^b$ den Flächeninhalt an, den G_f und die x-Achse im Intervall [a;b] einschließen. Berechnen Sie den Flächeninhalt und das bestimmte Integral.
   Achten Sie gegebenenfalls auf den Unterschied.

   a) $f(x) = 0{,}5x + 1 \quad ; \quad [A]_0^2 \quad und \quad \int_0^2 f(x)\,dx$

   b) $f(x) = 0{,}5x + 1 \quad ; \quad [A]_{-4}^2 \quad und \quad \int_{-4}^2 f(x)\,dx$

   c) $f(x) = 4 - x^2 \quad ; \quad [A]_0^3 \quad und \quad \int_0^3 f(x)\,dx$

2. Prüfen Sie, ob es Funktionen mit den geforderten Eigenschaften gibt. Es gilt $a > 0$.

   a) $f(x) \quad mit \quad \int_{-2}^2 f(x)\,dx = 0 \quad und \quad f(2) = 4$

   b) $f(x) \quad mit \quad \int_{-2}^2 f(x)\,dx = -[A]_{-2}^2 \quad und \quad f(0) = -1$

   c) $f(x) \quad mit \quad \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0 \quad und \quad f(a) \neq 0$

   d) $f(x) \quad mit \quad \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0 \quad und \quad f(0) \neq 0$

   e) $f(x) \quad mit \quad \int_0^a f(x)\,dx = a$

   f) $f(x) \quad mit \quad \int_0^1 f(x)^2\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$

3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

   a) $\int_1^2 (0{,}5x+1)\,dx$ b) $\int_0^k \frac{x^2+2x}{2}\,dx$ c) $\int_0^3 u\cdot(u+1)\,du$

   d) $\int_1^{\sqrt{3}} (x^3 - 2x)\,dx$ e) $\int_1^{\sqrt{2}} 5x - 4\,dx$ f) $\int_0^3 2u+1\,dx$

4. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 12x)$ soll untersucht werden.

   a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen. Skizzieren Sie den Graphen.

   b) Berechnen Sie $\int_{-1}^k f(x)\,dx$ für $k = -2,\ k = 0,\ k = 1,\ k = 2$ und $k = 4$.

   Deuten Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.

5. Berechnen Sie das bestimmte Integral $I(k) = \int_0^k 2 - x\,dx$ allgemein in Abhängigkeit von k.

   Für welchen Wert von k nimmt dieses Integral seinen größten Wert an? Deuten Sie diesen Fall geometrisch.

Q12 * Mathematik * Aufgaben zum bestimmten Integral * Lösungen

1. a) $[A]_0^2 = \int_0^2 f(x)\,dx = 3$ b) $[A]_{-4}^2 = 5 \quad und \quad \int_{-4}^2 f(x)\,dx = 3$

c) $[A]_0^3 = [A]_0^2 + [A]_2^3 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3} \quad und \quad \int_0^3 f(x)\,dx = 3 = \frac{16}{3} - \frac{7}{3}$

2. a) z.B. $f(x) = 2x \quad oder \quad f(x) = 0{,}5x^3 \quad oder \quad f(x) = x \cdot |x|$

b) z.B. $f(x) = -1 \quad oder \quad f(x) = 1 - 0{,}25x^2$

c) z.B. $f(x) = x \quad oder \quad f(x) = x^3$

d) schwer! z.B. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}x + 2 & ; \; falls \; x \le 0 \\ 2 - \frac{6}{a}x & ; \; falls \; x > 0 \end{cases}$

e) z.B. $f(x) = \frac{2}{a}x$

f) z.B. $f(x) = 0 \quad oder \quad f(x) = 1$

3. a) $\int_1^2 (0{,}5x+1)\,dx = 1{,}75$ b) $\int_0^k \frac{x^2+2x}{2}\,dx = \frac{1}{6}\left(k^3 + 3k^2\right)$

c) $\int_0^3 u \cdot (u+1)\,du = 13{,}5$ d) $\int_1^{\sqrt{3}} (x^3 - 2x)\,dx = 0$

e) $\int_1^{\sqrt{2}} 5x - 4\,dx = 6{,}5 - 4\sqrt{2}$ f) $\int_0^3 2u + 1\,dx = 6u + 3$

4. a) Punktsymmetrie zum Ursprung; Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm 2\sqrt{3}$

Extrempunkte: $HOP(-2/2)$; $TIP(2/-2)$

Wendepunkt: $WP(0/0)$

b) $\int_{-1}^k f(x)\,dx = \frac{1}{32}\left(k^2 - 32\right)\cdot\left(k^2 - 1\right) = I(k)$

$I(-2) = -\frac{57}{32}$; $I(0) = \frac{23}{32}$; $I(1) = 0$; $I(2) = -\frac{57}{32}$

5. $I(k) = \int_0^k 2 - x\,dx = 2k - 0{,}5k^2$; $I'(k) = 2 - k$

$I(k)$ ist maximal für $I'(k) = 0$, d.h. für $k = 2$.