

Q12 * Mathematik * Analytische Geometrie * Typische Aufgaben

Wichtige unverzichtbare Formeln:

$$\overline{AB} = \vec{B} - \vec{A} ; \vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 ; |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) \text{ also } \cos \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ und } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

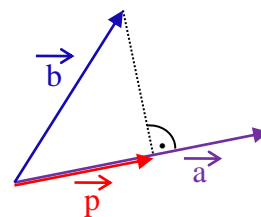


$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \text{ und } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| ; V_{\text{Pyramide } ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB} \circ (\overline{AC} \times \overline{AD})| = \frac{1}{6} \cdot |\overline{AD} \circ (\overline{AB} \times \overline{AC})|$$

Hilfreich: Die **Projektion** \vec{p} eines Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a}

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{\vec{a} \circ \vec{a}} \cdot \vec{a}$$



Typische Aufgaben:

1. Wandle die Parameterform einer Ebene in die Normalenform (bzw. HNF) um!

$$E : \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} ; \text{ Finde zunächst } \vec{n}_E = \vec{v} \times \vec{w} \text{ und dann } E : (\vec{X} - \vec{A}) \circ \vec{n}_E = 0$$

$$\text{Beispiel: } E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} n_1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}_E \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{n}_E' = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E: (\vec{X} - \vec{A}) \circ \vec{n}_E' = 0 \text{ also } \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \text{ also}$$

$$E: 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 15 = 0 \text{ und } E_{\text{HNF}}: \frac{1}{\sqrt{25+16+4}} (-5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 15) = 0$$

2. Wandle die Normalenform einer Ebene in die Parameterform um! (Selten gebraucht!)

Beispiel: $E: 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 15 = 0$; Berechne möglichst einfach drei Punkte der Ebene:
 $5 \cdot (-3) - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 15 = 0$ also $(-3/0/0)$ Punkt der Ebene, analog $(1/5/0)$, $(1/4/2)$.

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 5 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 4 - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \text{ also } E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Oder finde zwei Richtungsvektoren } \vec{v} \perp \vec{n}_E \text{ und } \vec{w} \perp \vec{n}_E \text{ mit } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ z.B. } \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Berechne Schnittpunkt von Gerade und Ebene.

- a) Falls Ebene in Parameterform gegeben ist, ergibt das Gleichsetzen drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Lösen mit dem Gauß-Algorithmus. Einsetzen der gefundenen Parameter in die Geraden- oder Ebenengleichung liefert den Schnittpunkt.

Beispiel: $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1) $-1 + t = 3 + r \Rightarrow t = 4 + r$ in (2) und (3)

(2) $1 + 2s = 4 + r$ (2) $r = 2s - 3$ in (3)

(3) $3s + t = 9 + 3r$ (3) $3s = 5 + 2r$ (3) $s = 1 \Rightarrow r = -1, t = 3$

Schnittpunkt $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $g \cap E = \{ S(2/3/6) \}$

- b) Meist einfacher: Ebenengleichung in Normalenform umwandeln.

Dann x_1, x_2 und x_3 von der Geradengleichung in Normalenform einsetzen und Parameter der Geraden ermitteln. (Falls keine Lösung: kein Schnittpunkt; falls allgemein gültig: Gerade liegt in der Ebene) Gefundenen Parameter in Geradengleichung einsetzen und damit Schnittpunkt berechnen.

Beispiel: $E: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 1 = 0$ und $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$2 \cdot (3+r) + 3 \cdot (4+r) - 2 \cdot (9+3r) - 1 = 0 \Leftrightarrow -r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = -1$

Schnittpunkt $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $g \cap E = \{ S(2/3/6) \}$



4. Berechne Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen.

Am einfachsten lösbar in Normalenform. Wandle Normalenform in die so genannte Achsenabschnittsform um.

$E: 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \Leftrightarrow \frac{3x_1}{-4} - \frac{5x_2}{-4} + \frac{x_3}{-4} = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{x_1}{-\frac{4}{3}} + \frac{x_2}{\frac{4}{5}} + \frac{x_3}{-4} = 1 \Leftrightarrow$ Schnittpunkte: $S_1(-\frac{4}{3}/0/0), S_2(0/\frac{4}{5}/0), S_3(0/0/-4)$

Hinweise:

E: $\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{-3} = 1$ bedeutet, dass es keinen Schnittpunkt mit der x_2 -Koordinatenachse gibt, die Ebene E also parallel zu dieser Achse verläuft.

Die Schnittgerade einer Ebene mit der x_1x_2 -Koordinatenebene verläuft durch die beiden Schnittpunkte der Ebene mit der x_1 - und der x_2 -Koordinatenachse.

5. Berechne Schnittgerade zweier Ebenen.

Die Ebenen können in Parameter- oder Normalenform vorliegen:

$$\text{Beispiel: } E_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d.h. } E_1: 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 13 = 0; \quad E_2: x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$$

Am aufwändigsten ist die Berechnung der Schnittgeraden – falls die Ebenen nicht parallel liegen – wenn beide Ebenen in Parameterform vorliegen.

a) Beide Ebenen in Parameterform:

Gleichsetzen liefert drei Gleichungen mit 4 Unbekannten.

Eliminiere nach dem Gauß-Algorithmus die beiden Parameter einer der beiden Ebenen.

Das liefert einen Zusammenhang zwischen den beiden Parametern der zweiten Ebene (oder bei parallelen Ebenen einen Widerspruch oder eine Aussage der Form $0 = 0$).

Einsetzen in die zweite Ebenengleichung liefert direkt die Schnittgerade.

Unser Beispiel:

$$E_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$E_1 \cap E_2:$$

$$(1) \quad 4 + 2r + 3s = 2 + p + q \quad (1) \quad s = q - 3p - 2 \quad \text{in (3)}$$

$$(2) \quad 1 - r - s = 1 - 2p \quad \Rightarrow \quad r = 2p - s \quad \text{in (1) und (3)}$$

$$(3) \quad 1 - 2s = 3 + p - q \quad (3) \quad q = 2 + p + 2s \quad (3) \quad q = 2 + 5p$$

Schnittgerade g

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (2 + 5p) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1+0 \\ 3-2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1+5 \\ -2+0 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Eine Ebene in Parameter- die andere in Normalenform:

$$E_1: 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 13 = 0; \quad E_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Setze x_1, x_2, x_3 aus der Parameterform in die Normalenform ein. Das liefert wieder den Zusammenhang zwischen p und q , der beim Einsetzen in E_2 die Schnittgerade g liefert.

$$E_1 \cap E_2:$$

$$2 \cdot (2 + p + q) + 4 \cdot (1 - 2p) + (3 + p - q) - 13 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow q = 2 + 5p$$

Schnittgerade g wie im Fall a) durch Einsetzen von $q = 2 + 5p$ in E_2 (siehe oben!).

Q12 * Mathematik * Analytische Geometrie * Typische Aufgaben * Blatt 4

c) Beide Ebenen in Normalenform:

Reduziere aus 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3 eine Gleichung mit nur noch 2 Unbekannten. Wähle dann eine davon als freie Variable $r \in \mathbb{R}$ und drücke die anderen durch r aus.

$$E_1: 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 13 = 0 \quad ; \quad E_2: x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$$

$$(1) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 13 = 0 \quad (1) \quad x_1 = 7 - 3x_2, \text{ wähle } x_2 = r \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0 \Rightarrow x_3 = 6 - x_1 - x_2 \text{ in (1)}$$

mit $x_2 = r \in \mathbb{R}$ gilt $x_1 = 7 - 3x_2 = 7 - 3r$ und $x_3 = 6 - x_1 - x_2 = 6 - 7 + 3r - r = -1 + 2r$

Die Schnittgerade g lautet damit

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3r \\ r \\ -1+2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



6. Bestimme den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E .

Wandle E in Hesse-Normalenform (HNF) um und setze die Koordinaten von P in den Term der HNF ein. Das Ergebnis entspricht dem gesuchten Abstand d , wobei ein negatives d darauf hinweist, dass der Punkt im gleichen Halbraum wie der Ursprung liegt.

Beispiel:

$$E: 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5 = 0 \quad ; \quad \text{d.h. } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\vec{n}_E| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

$$E_{\text{HNF}}: \frac{1}{\sqrt{29}}(-2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5) = 0 \quad ; \quad \text{für } P(1/2/3) \text{ und } Q(0/-3/1) \text{ gilt nun}$$

$$d(E;P) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 5) = -\frac{6}{\sqrt{29}} \quad P \text{ liegt im gleichen Halbraum wie } (0/0/0).$$

$$d(E;Q) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-2 \cdot 0 - 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 - 5) = \frac{10}{\sqrt{29}} \quad \text{und } Q \text{ und der Ursprung } (0/0/0) \text{ liegen}$$

in den beiden unterschiedlichen Halbräumen, in die die Ebene den Raum teilt.

7. Bestimme den Abstand zweier windschiefer Geraden g und h .

Ermittle Vektor \vec{n} senkrecht zu den Richtungsvektoren \vec{v} und \vec{w} von g und h .

Die Hilfsebene E enthält g und hat \vec{n} als zweiten Richtungsvektor. $E \cap h = \{F_1\}$

Die Gerade k durch F_1 mit Richtungsvektor \vec{n} schneidet g im Punkt F_2 und der Gesuchte Abstand ist der Abstand dieser beiden Punkte F_1 und F_2 .

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E \cap h = \{F_1(2/5/8)\};$$

$$k \cap g = \{F_2(4/3/4)\} \quad \text{und} \quad d = \overline{F_1F_2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

