

Q12 * Mathematik * Wiederholung der Ableitungsregeln

Wichtige Ableitungsregeln

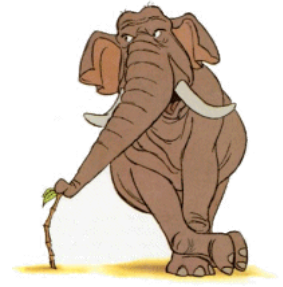
$$f(x) = a \cdot g(x) + b \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x) + b \cdot h'(x)$$

$$f(x) = a \cdot x^r \Rightarrow f'(x) = a \cdot r \cdot x^{r-1} \quad (\text{für } r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$\text{insbesondere auch } f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f(x) = a \cdot e^{bx} \Rightarrow f'(x) = a \cdot e^{bx} \cdot b$$

$$f(x) = a \cdot \ln(bx) \Rightarrow f'(x) = a \cdot \frac{1}{bx} \cdot b = \frac{a}{x}$$



Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{n(x) \cdot z'(x) - n'(x) \cdot z(x)}{n(x)^2}$

Kettenregel: $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$



Aufgaben:

Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen jeweils D_f und dann die erste und zweite Ableitung. Ermitteln Sie dann – sofern möglich – alle Hoch-, Tief-, Terrassen- und Wendepunkte.

1. $f_1(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{2-x}$

2. $f_2(x) = \ln(2x) - \ln(1+x^2)$

3. $f_3(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$

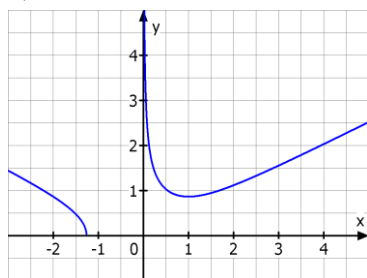
4. $f_4(x) = \frac{4x}{1+x^2}$

5. $f_5(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{2}{x}}$

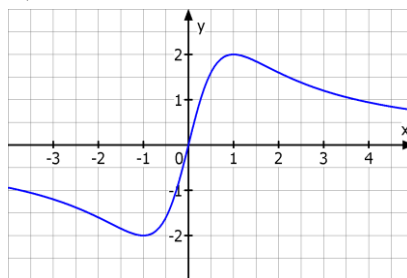
6. $f_6(x) = (x^2 - 2x) \cdot (x^2 + x)$

Ordnen Sie die Graphen der sechs Funktionen den abgebildeten Graphen zu.

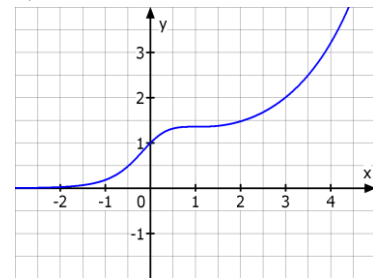
a)



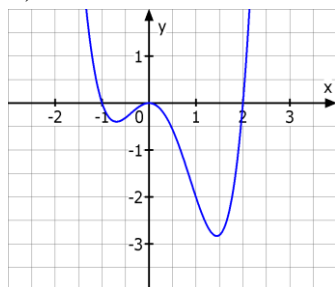
b)



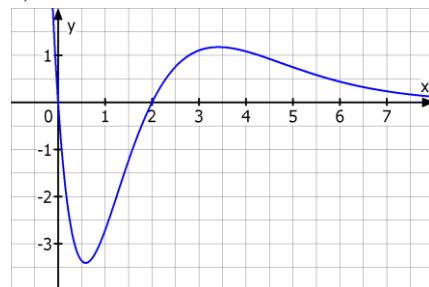
c)



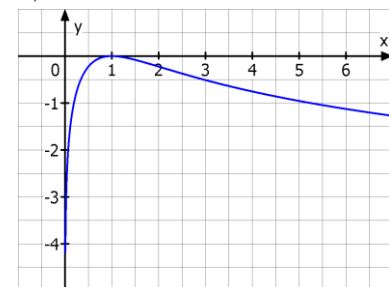
d)



e)



f)



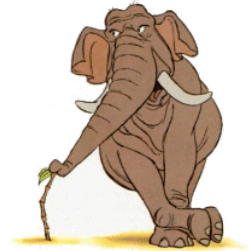
Q12 * Mathematik * Wiederholung der Ableitungsregeln * Lösungen

1. $f_1(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^{-x}$; $D_{f_1} = \mathbb{R}$ **Bild e)**

$$f_1'(x) = (-x^2 + 4x - 2) \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad f_1''(x) = (x^2 - 6x + 6) \cdot e^{-x}$$

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad \text{TIP bei } x_1 = 2 + \sqrt{2} \quad \text{und HOP bei } x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$f_1''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{3/4} = 3 \pm \sqrt{3} \quad \text{WP bei } x_{3/4}$$



2. $f_2(x) = \ln(2x) - \ln(1+x^2)$; $D_{f_2} = \mathbb{R}^+$ **Bild f)**

$$f_2'(x) = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{(1-x)(1+x)}{x(1+x^2)} \quad \text{und} \quad f_2''(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{x^2(1+x^2)^2}$$

$$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \quad \text{HOP}(1/0)$$

$$f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \quad \text{mit } u = x^2 \text{ also } u^2 - 4u - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

Wendepunkt bei x_2

3. $f_3(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$; $D_{f_3} = \mathbb{R}$ **Bild c)**

$$f_3'(x) = \frac{(x-1) \cdot e^x}{(1+x^2)^2} \quad \text{und} \quad f_3''(x) = \frac{(-4x^3 + 9x^2 - 4x - 1) \cdot e^x}{(1+x^2)^3} = \frac{(x-1) \cdot (-4x^2 + 5x + 1) \cdot e^x}{(1+x^2)^3}$$

$$f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \quad \text{Terrassenpunkt } (1/\frac{e}{2}) \quad \text{und damit Wendepunkt } (1/\frac{e}{2})$$

$$f_3''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 ; x_{2/3} = \frac{1}{8} \cdot (5 \pm \sqrt{41}) \quad \text{WP bei } x_1, x_2 \text{ und } x_3$$



4. $f_4(x) = \frac{4x}{1+x^2}$; $D_{f_4} = \mathbb{R}$ **Bild b)**

$$f_4'(x) = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4 \cdot (1-x) \cdot (1+x)}{(1+x^2)^2} \quad \text{und} \quad f_4''(x) = \frac{8x^3 - 24x}{(1+x^2)^3} = \frac{8x \cdot (x^2 - 3)}{(1+x^2)^3}$$

$$f_4'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1, \quad \text{HOP}(1/2) \quad \text{und} \quad \text{TIP}(-1/-2)$$

$$f_4''(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0 ; x_{4/5} = \pm \sqrt{3} \quad \text{WP bei } x_3, x_4 \text{ und } x_5$$

5. $f_5(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{2}{x}}$; $D_{f_5} = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt[3]{2}; 0]$ **Bild a)**

$$f_5'(x) = \frac{(x^3 - 1)}{2x \cdot \sqrt{x^4 + 2x}} \quad \text{und} \quad f_5''(x) = \frac{x \cdot (2x^6 - 4x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 4)}{2x^2 \cdot (x^4 + 2x) \cdot \sqrt{x^4 + 2x}}$$

$$f_5'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, \quad \text{TIP}(1/0,5 \cdot \sqrt{3}) ; f_5''(x) = 0 \quad \text{keine Lösung } x \in D_{f_5} \text{ erkennbar.}$$

6. $f_6(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$; $D_{f_6} = \mathbb{R}$ **Bild d)**

$$f_6'(x) = x \cdot (4x^2 - 3x - 4) \quad \text{und} \quad f_6''(x) = 2 \cdot (6x^2 - 3x - 2)$$

$$f_6'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_{2/3} = \frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{73}) \quad \text{HOP bei } x_1 \quad \text{und} \quad \text{TIP bei } x_{2/3}$$

$$f_6''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{4/5} = \frac{1}{12} \cdot (3 \pm \sqrt{57}) \quad \text{WP bei } x_{4/5}$$

