

Q12 * Mathematik * Vorbereitung auf die Abiturprüfung (5)
Aufgaben zum natürlichen Logarithmus

1. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen den Definitionsbereich D_f und ermitteln Sie alle Nullstellen.
 Berechnen Sie dann die Ableitung $f'(x)$ und geben ermitteln Sie alle Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen von f .

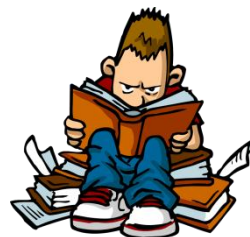
a) $f(x) = \ln(2x + 3)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

c) $f(x) = \ln(2 + 2x - x^2)$

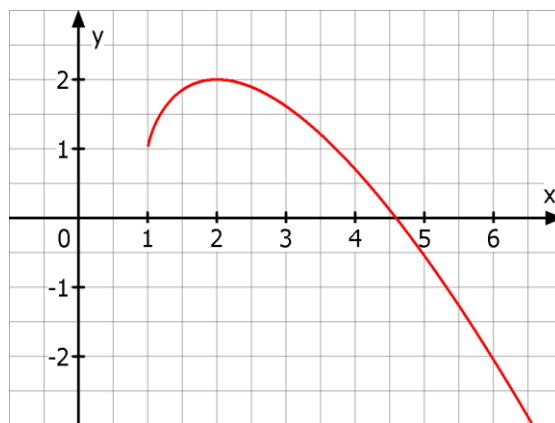
d) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x^2+1}\right)$

e) $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$



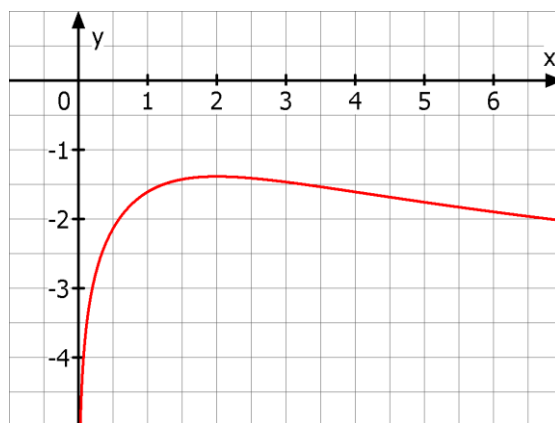
2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x - (x-1) \cdot \ln(x-1)$.

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.
 b) Zeigen Sie, dass G_f nur einen Extrempunkt, nämlich den Hochpunkt $(2/2)$ besitzt.
 c) Begründen Sie, dass f nur eine Nullstelle x_1 besitzt, und dass $4 < x_1 < 5$ gilt.



3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+4}\right)$.

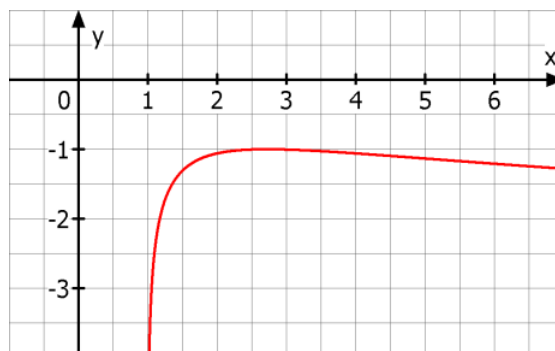
- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.
 b) Zeigen Sie, dass G_f nur einen Extrempunkt, nämlich den Hochpunkt $(2/f(2))$ besitzt.
 c) Begründen Sie, dass f keine Nullstelle besitzt.



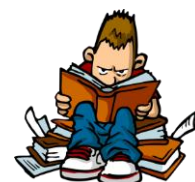
4. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

$f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und zeigen Sie, dass der Graph von f genau einen Hochpunkt besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Hochpunktes.



Q12 * Mathematik * Vorbereitung auf die Abiturprüfung (5)
Aufgaben zum natürlichen Logarithmus * Lösungen



1. a) $f(x) = \ln(2x+3)$; $D_f =]-1,5 ; \infty[$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$

$$f'(x) = \frac{2}{2x+3} \text{ und } f'(x) > 0 \text{ f\"ur alle } x \in D_f, \text{ also keine Hoch- bzw. Tiefpunkte}$$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$; $D_f = \mathbb{R} \setminus [0; 2]$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x} \text{ und } f'(x) > 0 \text{ f\"ur } x \in]2; \infty[\text{ und } f'(x) < 0 \text{ f\"ur } x \in]-\infty; 0[,$$

also keine Hoch- bzw. Tiefpunkte

c) $f(x) = \ln(2+2x-x^2)$; ; $D_f =]1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}[$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x-2} \text{ und } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; \text{ HOP}(1; \ln 3) \approx (1; 1,1)$$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x^2+1}\right)$; $D_f =]1,5 ; \infty[$; NSt.: $f(x) = 0$ hat keine Lösung, also keine NSt.

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{2x-3} \cdot \frac{2 \cdot (x^2+1) - (2x-3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (-x^2+3x+1)}{(2x-3) \cdot (x^2+1)} ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{HOP}(x_1; f(x_1)) \approx (3,3; -1,2)$$

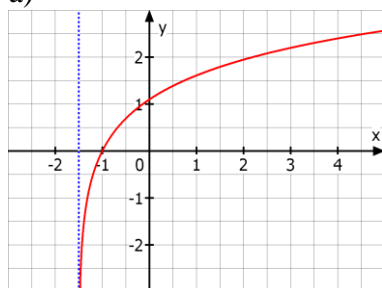
e) $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$; $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1; 0]$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot (x+1)} \text{ und } f'(x) > 0 \text{ f\"ur } x \in]-\infty; -1[\text{ und } f'(x) > 0 \text{ f\"ur } x \in]0; \infty[,$$

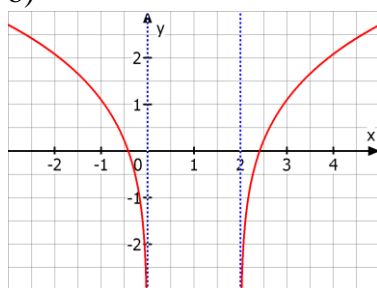
also keine Hoch- bzw. Tiefpunkte

Bilder zu den Graphen:

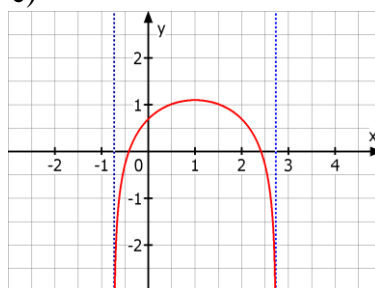
a)



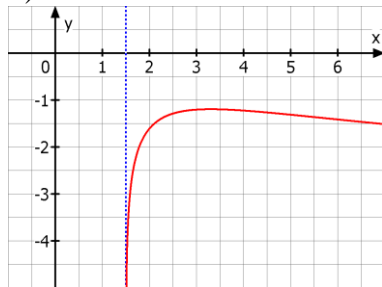
b)



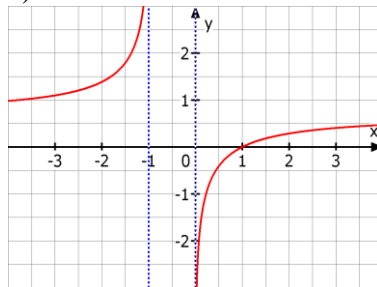
c)



d)



e)



2. $f(x) = x - (x-1) \cdot \ln(x-1)$.

a) $D_f =]1; \infty[$ und $f'(x) = -\ln(x-1)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$f'(x) > 0$ für $1 < x < 2$ und

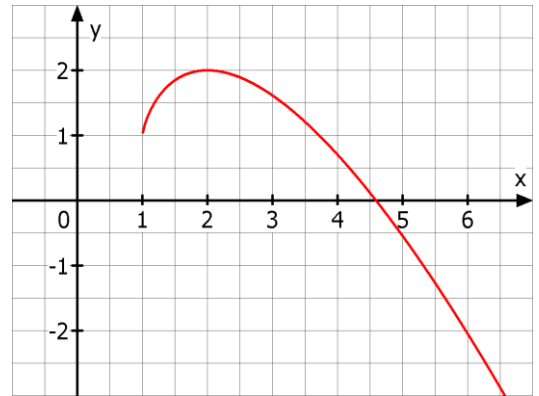
$f'(x) < 0$ für $2 < x < \infty \Rightarrow \text{HOP}(2;2)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [x - (x-1) \cdot \ln(x-1)] = 1 - 0 = 1$

also gibt es keine Nullstelle im Intervall $]1; 2]$.

f ist streng monoton fallend im Intervall $[2; \infty[$

und $f(4) \approx 0,70 > 0$ und $f(5) \approx -0,55$, also gibt es nur eine Nullstelle im Intervall $]4; 5[$.



3. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+4}\right)$.

a) $D_f =]0; \infty[$ und $f'(x) = \frac{4-x^2}{x \cdot (x^2+4)}$

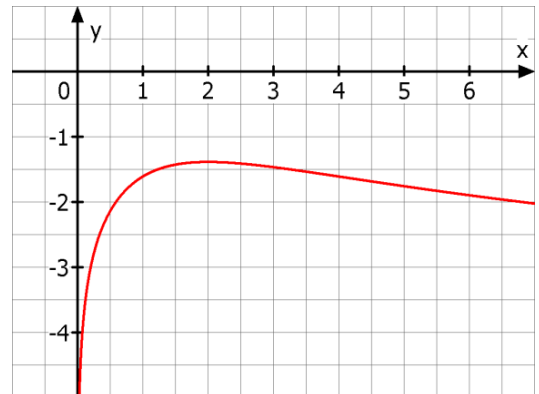
b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$f'(x) > 0$ für $x \in]0; 2[$ und

$f'(x) < 0$ für $x \in]2; \infty[\Rightarrow$

$\text{HOP}(2; f(2)) \approx (2; -1,4)$

c) Da der Hochpunkt unterhalb der x-Achse liegt [$f(2) \approx -1,4 < 0$], besitzt f keine Nullstelle.



4. $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$;

$D_f: \frac{\ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$ also $D_f =]1; \infty[$

$$f'(x) = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x \cdot \ln x}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x_1 = e \approx 2,718$

$f'(x) > 0$ für $x \in]1; e[$ und

$f'(x) < 0$ für $x \in]e; \infty[\Rightarrow$

$\text{HOP}(e; f(e)) = (e; -1)$, denn $f(e) = \ln \frac{\ln e}{e} = \ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$

