Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung (4)
Kombinatorik

Aus Urne mit n Elementen werden k ausgewählt	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen ($k \le n$)
mit Beachtung der Reihenfolge	k-Tupel n^k	k-Permutation $\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	k-Kombination $\binom{n+k-1}{k}$	k-Teilmenge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Die k-Kombination kommt äußerst selten vor!

Z.B. bei der Obstschüsselaufgabe:
In eine Obstschale sollen 5 Obststücke gelegt werden.
Es sind dabei Äpfel, Birnen und/oder Orangen möglich.
Wie viele Möglichkeiten gibt es?
$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+5-1}{5} = 21$

1. Einfache Kombinatorik-Aufgaben
   Wie viele Möglichkeiten gibt es,
   a) aus den 20 Schülern einer Klasse 3 für eine Ausfrage auszuwählen?
   b) genau 5 Herz-Karten aus einem üblichen Kartenspiel mit 32 Karten zu ziehen?
   c) mit den 26 Buchstaben des Alphabets verschiedene Wörter mit 4 Buchstaben zu schreiben?
   d) mit genau den Buchstaben des Wortes HANS andere Worte zu bilden?
   e) mit genau den Buchstaben des Wortes JOHANNES andere Worte zu bilden?
   f) 20 Schüler auf die 32 Plätze eines Klassenzimmers zu verteilen, wenn
      f 1) die Schüler unterschieden werden bzw.
      f 2) nur die besetzten Plätze von Bedeutung sind?

2. In einem Flugzeug mit 250 Plätzen sollen 240 Passagiere untergebracht werden.
   a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die freien Plätze?
   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die freien Plätze, wenn von den 50 Fensterplätzen genau 2 frei bleiben sollen?

3. Zehn befreundete Ehepaare setzen sich in eine Reihe, die 20 Plätze umfasst.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
   a) sich die Personen beliebig setzen,
   b) die Ehepaare nebeneinander sitzen,
   c) die Frauen nebeneinander sitzen.

Für Laplace-Wahrscheinlichkeiten immer zuerst überlegen, welches Ω geeignet ist.

Es gilt dann $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Für unabhängige Ereignisse A und B gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Für unvereinbare Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Für beliebige Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse beim Ziehen von 5 Karten aus einem Kartenspiel mit 32 Karten?
   A = „nur Herzen“
   B = „genau 3 Herzen“
   C = „höchstens 2 Herzen“
   D = „nur Herzen oder zwei Damen“
   E = „mindestens 3 Damen“
   F = „genau 2 Herzen oder genau 2 Karo“
   G = „genau 2 Damen aber kein Herz“
   H = „genau ein Pärchen (und nicht mehr!)“
   K = „ein Doppelpärchen“
   L = „ein Fullhouse“

5. a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Geburtstage von 12 Personen in 12 verschiedenen Monaten liegen? (Jeder Monat sei dabei gleich wahrscheinlich.)
   b) Wie lautet die Antwort auf die Frage in a) bei nur 10 Personen?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen mindestens eine ist, die mit mir am gleichen Tag Geburtstag hat? (Rechne mit 365 Tagen ohne 29. Februar.) Ab welchem n lohnt es sich darauf zu wetten?

6. Wie oft muss man einen Würfel werfen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens eine „6“ wirft?

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n gilt: $P_p^n(X = k) = B(n/p/k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^k$

7. Eine Firma stellt Bolzen mit 3% Ausschuss her.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) unter 80 Bolzen genau 3 schadhaft sind,
   b) unter 80 Bolzen höchstens 3 schadhaft sind,
   c) unter 200 Bolzen genau 8 schadhaft sind,
   d) unter 200 Bolzen höchstens 8 schadhaft sind,
   e) unter 200 Bolzen mindestens 6 schadhaft sind.

Baumdiagramme helfen bei „unübersichtlichen“ Kombinatorik-Aufgaben und auch bei bedingten Wahrscheinlichkeiten.
Auch 4-Felder-Tafeln sind oft hilfreich.

8. Aus einer Urne mit 4 roten und zwei schwarzen Kugeln ziehen Anton und Berta abwechselnd je eine Kugel. Gewinner ist, wer die zweite schwarze Kugel zieht.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anton, der mit dem Ziehen beginnt?

Für bedingte Wahrscheinlichkeiten gilt

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{und damit} \quad P_B(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A) \ .$$

9. Eine Insektenpopulation besteht aus 60% Weibchen und 40% Männchen.
   8% aller Insekten haben rote Augen, aber unter den Männchen sind es nur 5%.
   a) Welcher Prozentsatz der Weibchen hat rote Augen?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein rotäugiges Insekt ein Männchen?

10. 2,0% einer Population sind Träger eines gefährlichen Virus, der durch einen Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% nachgewiesen werden kann (d.h. der Test ist positiv).
    Leider werden aber auch 5% der Gesunden durch diesen Test als Viren-Träger eingestuft.
    Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person tatsächlich mit dem Virus infiziert, wenn der Test positiv ausfällt?

11. Drei Maschinen A, B und C produzieren 60%, 30% bzw. 10% einer bestimmten Schraubensorte. Der Ausschussanteil beträgt dabei 5%, 2% bzw. 1%.
    Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine defekte Schraube von Maschine B ?

Q12 * Mathematematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung (4)
Kombinatorik * Lösungen

1. a) $\binom{20}{3} = 1140$ b) $\binom{8}{5} = 56$ c) $26^4 = 456976$ d) $4! = 24$

e) $\frac{8!}{2!} = 20160$ f1) $\binom{32}{20} \cdot 20! \approx 5{,}5 \cdot 10^{26}$ f2) $\binom{32}{20} \approx 2{,}26 \cdot 10^8$

2. a) $\binom{250}{10} \approx 2{,}2 \cdot 10^{17}$ b) $\binom{50}{2} \cdot \binom{200}{8} \approx 6{,}7 \cdot 10^{16}$

3. a) $20! \approx 2{,}4 \cdot 10^{18}$ b) $10! \cdot 2^{10} \approx 3{,}7 \cdot 10^9$ c) $11 \cdot 10! \cdot 10! \approx 1{,}4 \cdot 10^{14}$

4. $|\Omega| = \binom{32}{5} = 201376$

$|A| = \binom{8}{5} = 56$ und $P(A) \approx 0{,}03\%$ $|B| = \binom{8}{3} \cdot \binom{24}{2} = 15456$; $P(B) \approx 7{,}7\%$

$|C| = \binom{8}{0} \cdot \binom{24}{5} + \binom{8}{1} \cdot \binom{24}{4} + \binom{8}{2} \cdot \binom{24}{3} = 184184$; $P(C) \approx 91{,}5\%$

$|D| = \binom{8}{5} + \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{3} = 19712$; $P(D) \approx 9{,}8\%$

$|E| = \binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{28}{1} = 1540$; $P(E) \approx 0{,}8\%$

$|F| = 2 \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{24}{3} - \binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{16}{1} = 100800$; $P(F) \approx 50{,}1\%$

$|G| = \binom{3}{2} \cdot \binom{21}{3} = 3990$; $P(G) \approx 2{,}0\%$

$|H| = \binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{1}^3 = 107520$; $P(H) \approx 53{,}4\%$

$|K| = \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot \binom{24}{1} = 24192$; $P(K) \approx 12{,}0\%$

$|L| = \binom{8}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{4}{2} = 1344$; $P(L) \approx 0{,}7\%$

5. a) $\frac{12!}{12^2} \approx 0{,}54 \cdot 10^{-5}$ b) $\frac{\binom{12}{10} \cdot 10!}{12^{10}} \approx 3{,}9 \cdot 10^{-3}$

c) $p_n = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$ und $p_n > 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n > 0{,}5 \Leftrightarrow \left(\frac{364}{365}\right)^n < 0{,}5 \Leftrightarrow$

$n \cdot \ln\frac{364}{365} < \ln 0{,}5 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln 364 - \ln 365} \approx 252{,}6$ also lohnt es sich ab $n \geq 253$.

6. $P_{1/6}^{n}(X \ge 1) \ge 0{,}99 \;\Leftrightarrow\; 1 - P_{1/6}^{n}(X=0) \ge 0{,}99 \;\Leftrightarrow\; P_{1/6}^{n}(X=0) \le 0{,}01 \;\Leftrightarrow\; (1-\frac{1}{6})^{n} \le 0{,}01 \Leftrightarrow$

$(\frac{5}{6})^{n} \le 0{,}01 \Leftrightarrow n \cdot \ln\frac{5}{6} \le \ln 0{,}01 \;\Leftrightarrow\; n \ge \frac{\ln 0{,}01}{\ln(5/6)} = 25{,}2\ldots$ also $n \ge 26$

Man muss also mindestens 26-mal den Würfel werfen.

7. a) $P_{0,03}^{80}(X=3) = B(80/0{,}03/3) = \binom{80}{3} \cdot 0{,}03^{3} \cdot 0{,}97^{77} = 0{,}2125\ldots \approx 21{,}3\%$

b) $P_{0,03}^{80}(X \le 3) = B(80/0{,}03/0) + B(80/0{,}03/1) + B(80/0{,}03/2) + B(80/0{,}03/3) =$

$0{,}97^{80} + \binom{80}{1} \cdot 0{,}03^{1} \cdot 0{,}97^{79} + \binom{80}{2} \cdot 0{,}03^{2} \cdot 0{,}97^{78} + \binom{80}{3} \cdot 0{,}03^{3} \cdot 0{,}97^{77} \approx 78{,}1\%$

c) $P_{0,03}^{200}(X=8) = B(200/0{,}03/8) = \binom{200}{8} \cdot 0{,}03^{8} \cdot 0{,}97^{192} = 0{,}1043\ldots \approx 10{,}4\%$

d) $P_{0,03}^{200}(X \le 8) = \sum_{k=0}^{8} B(200/0{,}03/k) = 0{,}85040$ (Tabelle)

e) $P_{0,03}^{200}(X \ge 6) = 1 - P_{0,03}^{200}(X \le 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} B(200/0{,}03/k) = 1 - 0{,}44323 = 0{,}55677$ (Tabelle)

8. Aus einem ziemlich umfangreichen Baumdiagramm erkennt man:

$P(\text{"Anton gewinnt"}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} =$

$\frac{4}{15} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{4}{15} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 40\%$

9. a) $\frac{0{,}06}{0{,}54} = \frac{1}{9} \approx 11\%$

Etwa 11% der Weibchen haben rote Augen.

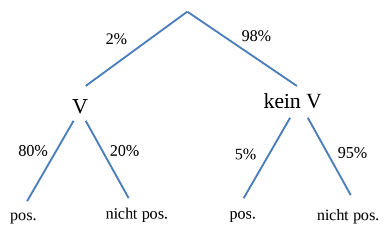
	männlich	weiblich	
rote Augen	$0{,}05 \cdot 0{,}40 = 0{,}02$	0,06	0,08
keine roten Augen	0,38	0,54	0,92
	0,40	0,60	

b) $P_{\text{rote Augen}}(\text{männlich}) = \frac{P(\text{männlich} \cap \text{rote Augen})}{P(\text{rote Augen})} = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 25\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% ist ein rotäugiges Insekt männlich.

10. $P_{\text{Test positiv}}(\text{Virus}) = \frac{P(\text{positiv} \cap \text{Virus})}{P(\text{positiv})} =$

$\frac{0{,}02 \cdot 0{,}8}{0{,}02 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}05} = 0{,}2461\ldots \approx 25\%$



11. $P_{\text{defekt}}(MB) = \frac{P(MB \cap \text{defekt})}{P(\text{defekt})} =$

$\frac{0{,}30 \cdot 0{,}02}{0{,}60 \cdot 0{,}05 + 0{,}30 \cdot 0{,}02 + 0{,}10 \cdot 0{,}01} =$

$\frac{0{,}006}{0{,}037} = 0{,}162\ldots\ldots \approx 16\%$