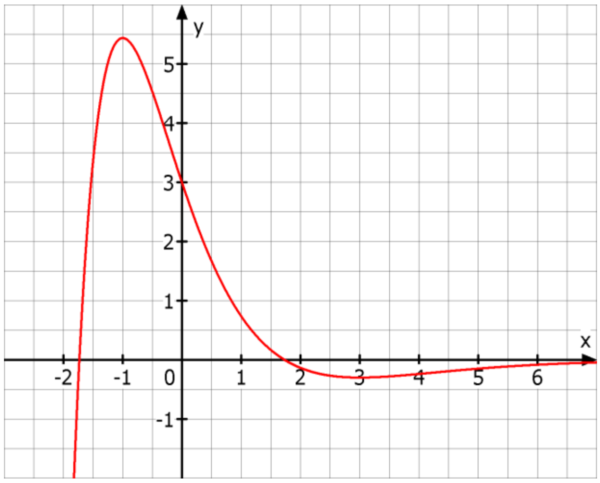
Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung (2)

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (3 - x^2) \cdot e^{-x}$

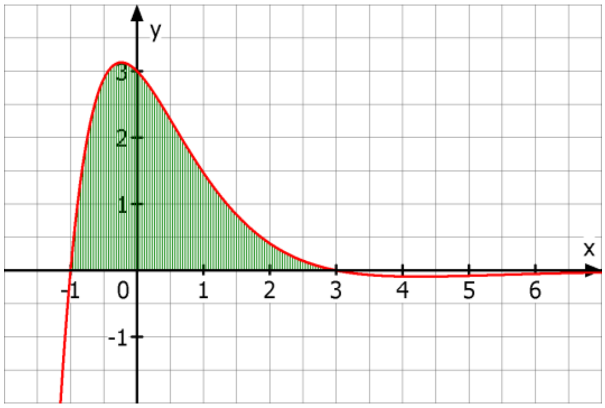


   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunktes.

   b) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen der Graph von f sein Krümmungsverhalten ändert. Tragen Sie die Wendepunkte in das Bild ein.

   c) Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\lim\limits_{x \to \infty} \int_0^x (3 - t^2) \cdot e^{-t}\, dt$.
   Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (3 + 2x - x^2) \cdot e^{-x}$.



   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion.

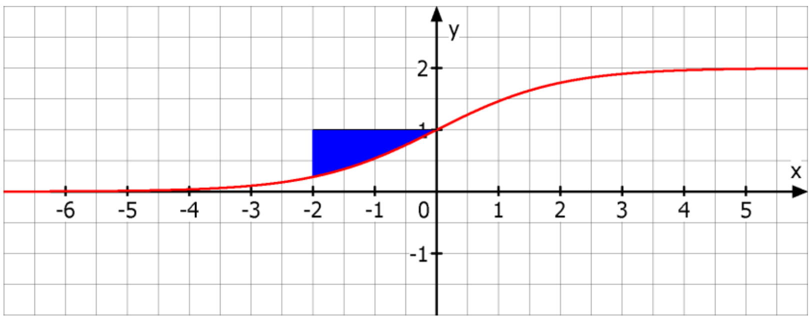
   b) Bestimmen Sie das Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$.

   c) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f .

   d) Der Graph schließt mit der x-Achse das schraffierte Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

   e) Der Graph schließt mit der positiven x-Achse eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.



   a) Bestimmen Sie das Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$.

   b) Begründen Sie, dass f streng monoton steigend ist.

   c) Zeigen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zu (0 / 1) ist.

   d) Berechnen Sie den Inhalt der blau gefärbten Fläche.

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung (2) * Lösungen

1. a) $f(x) = (3-x^2)\cdot e^{-x} \;\Rightarrow\; f'(x) = (x^2-2x-3)\cdot e^{-x} = (x+1)\cdot(x-3)\cdot e^{-x}$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 3$

   Anhand der Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an den Stellen x_1 und x_2 erkennt man $HOP(-1/2e) \approx (-1/5{,}4)$ und $TIP(3/-6e^{-3}) \approx (3/-0{,}3)$.

   b) $f''(x) = (-x^2+4x+1)\cdot e^{-x}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x+1 = 0 \Leftrightarrow$

   $x_3 = 2-\sqrt{5} \approx -0{,}2$; $x_4 = 2+\sqrt{5} \approx 4{,}2$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^x (3-t^2)\cdot e^{-t}\,dt = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\,(t^2+2t-1)\cdot e^{-t}\,\right]_0^x = 0-(-1)\cdot e^0 = 1$

   Die Stammfunktion F von f findet man mit dem Probeansatz $F(x) = (ax^2+bx+c)\cdot e^{-x}$.

   $F'(x) = (-ax^2+(2a-b)x+(b-c))\cdot e^{-x} \overset{!}{=} f(x) = (-x^2+3)\cdot e^{-x} \Leftrightarrow a=1$ und $b=2$ und $c=-1$.

   Interpretation: Die von der positiven x-Achse, der positiven y-Achse und dem Graphen eingeschlossene Fläche ist um 1 größer als die sich ins Unendliche erstreckende Fläche zwischen der positiven x-Achse und dem Graphen von f.

2. a) NSt.: $f(x) = (3+2x-x^2)\cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 3+2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3+2x-x^2)}{e^x} = 0$ (Merkhilfe!)

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x}-1\right)\cdot e^{-x} = "\infty\cdot(-1)\cdot e^{\infty}" = -\infty$

   c) $f'(x) = (x^2-4x-1)\cdot e^{-x}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x-1 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2-\sqrt{5}$; $x_4 = 2+\sqrt{5}$.

   Anhand der Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an den Stellen x_3 und x_4 erkennt man $HOP(x_3/f(x_3)) \approx (-0{,}2/3{,}1)$ und $TIP(x_4/f(x_4)) \approx (4{,}2/-0{,}1)$.

   d) Die Stammfunktion F von f findet man mit dem Probeansatz $F(x) = (ax^2+bx+c)\cdot e^{-x}$.

   $F'(x) = (-ax^2+(2a-b)x+(b-c))\cdot e^{-x} \overset{!}{=} f(x) = (-x^2+2x+3)\cdot e^{-x} \Leftrightarrow$

   $a=1$ und $b=0$ und $c=-3$ also $F(x) = (x^2-3)\cdot e^{-x}$.

   $A_1 = \int\limits_{-1}^{3} (3+2x-x^2)\cdot e^{-x}\,dx = \left[\,(x^2-3)\cdot e^{-x}\,\right]_{-1}^{3} = 6\cdot e^{-3}-(-2)\cdot e = 2e+6\cdot e^{-3} \approx 5{,}7$

   e) $A_2 = \left|\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_3^x (3+2t-t^2)\cdot e^{-t}\,dt\right| = \left|\lim\limits_{x\to\infty} \left[\,(t^2-3)\cdot e^{-t}\,\right]_3^x\right| = \left|0-6\cdot e^{-3}\right| = 6\cdot e^{-3} \approx 0{,}3$

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{1+\frac{1}{e^x}} = "\dfrac{2}{1+0}" = 2$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^x}{e^x+1} = "\dfrac{0}{0+1}" = 0$

   b) $f'(x) = \dfrac{(e^x+1)\cdot e^x - e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ für alle $x \in R$, also ist f streng mon. stg.

   c) Für die geforderte Punktsymmetrie zu (0/1) muss gelten: $f(x)-1 = 1-f(-x)$ (für $x \geq 0$).

   $f(x)-1 = \dfrac{2e^x}{e^x+1}-1 = \dfrac{2e^x-e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ und

   $1-f(-x) = 1-\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} = 1-\dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{1+e^x-2}{1+e^x} = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

   d) $A = \int\limits_{-2}^{0} 1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}\,dx = \left[\,x-2\cdot\ln(e^x+1)\,\right]_{-2}^{0} = -2\ln(2)-(-2-2\cdot\ln(e^{-2}+1)) =$

   $2+2\cdot\ln\dfrac{e^{-2}+1}{2} \approx 0{,}87$