

Q12 * Astrophysik * Lösungen zu den Aufgaben zur Sternentwicklung

Aufgaben zum Hauptreihenstadium



1. Begründen Sie, dass für die Verweildauer τ auf der Hauptreihe gilt: $\tau \sim \frac{1}{m^2}$.
2. Zeigen Sie, dass aus $L^* \leq 10^5$ für die Masse m eines Sterns $m < 50 \cdot m_\odot$ folgt.
3. Schätzen Sie für sehr massereiche Hauptreihensterne (B0 mit $M \approx -5$) die Masse und die Verweildauer auf der Hauptreihe ab.

Lösungen

1. Für die Verweildauer τ auf der Hauptreihe gilt $\tau \sim \frac{1}{m^2}$, denn

$\tau \sim m$, denn die Verweildauer ist proportional zur Masse des Brennstoffvorrats.

$\tau \sim \frac{1}{L}$, denn je größer L umso größer der Brennstoffverbrauch.

Wegen $L \sim m^3$ für Hauptreihensterne folgt damit $\tau \sim \frac{m}{L} \sim \frac{m}{m^3} = \frac{1}{m^2}$

2. Aus $L^* \leq 10^5$ folgt $m < 50 \cdot m_\odot$, denn

$$L \sim m^3 \Rightarrow L^* = \frac{L}{L_\odot} = \frac{m^3}{m_\odot^3} \Rightarrow m = m_\odot \cdot \sqrt[3]{\frac{L}{L_\odot}} = m_\odot \cdot \sqrt[3]{L^*} \leq m_\odot \cdot \sqrt[3]{10^5} \approx 46 m_\odot < 50 m_\odot$$

3. Für einen Hauptreihenstern B0 mit $M \approx -5$ gilt:

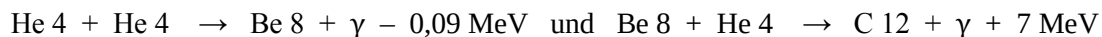
$$M - M_\odot = -2,5 \cdot \lg \frac{L}{L_\odot} \Rightarrow L^* = \frac{L}{L_\odot} = 10^{0,4 \cdot (M_\odot - M)} = 10^{0,4 \cdot (4,8 + 5)} = 10^{4,32} \approx 2,1 \cdot 10^5$$

$$L^* = (m^*)^3 \Rightarrow m^* = \sqrt[3]{L^*} = \sqrt[3]{2,1 \cdot 10^5} \approx 59 \quad \text{also } m \approx 59 m_\odot$$

$$\tau \sim \frac{1}{m^2} \quad \text{und} \quad \tau_\odot \approx 10^9 \text{ a} \Rightarrow \frac{\tau}{\tau_\odot} = \frac{m_\odot^2}{m^2} = \frac{1}{59^2} \Rightarrow \tau = \frac{\tau_\odot}{59^2} = \frac{10 \cdot 10^9 \text{ a}}{59^2} \approx 3 \text{ Millionen Jahre}$$

Aufgaben zu Roten Riesen

1. Erklären Sie den Namen „Drei-Alpha-Prozess“ für die folgende Fusionsreaktion!



Lösung: Es müssen hier (nahezu gleichzeitig) drei Heliumkerne zusammenstoßen.

Eine Gesamtgleichung lautet $\text{He } 4 + \text{He } 4 + \text{He } 4 \rightarrow \text{C } 12 + \gamma + 7 \text{ MeV}$

2. Beteigeuze im Sternbild Orion ist ein Pulsationsveränderlicher und etwa 600 Lj entfernt. Der Winkeldurchmesser des Sterns schwankt etwa zwischen $0,026''$ und $0,042''$ mit einer halbregelmäßigen Periode von ca. 2000 Tagen, die scheinbare Helligkeit nimmt Werte zwischen 0,3 und 0,6 an. Die Oberflächentemperatur beträgt etwa 3500K.
 - a) Berechnen Sie den maximalen und den minimalen Sternradius von Beteigeuze in Vielfachen der Astronomischen Einheit.
 - b) Welche relative maximale bzw. minimale Leuchtkraft L^* hat Beteigeuze?
 - c) Für die Masse von Beteigeuze findet man 20 Sonnenmassen angegeben. Warum stimmt dieser Wert nicht überein mit dem Wert, der sich aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung ergibt?

Lösung:

$$a) d = 600 \text{ Lj} = 600 \cdot 9,46 \cdot 10^{11} \text{ m} = \frac{600 \cdot 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}}{1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}} \text{ AE} = 3,79 \cdot 10^7 \text{ AE} \quad (\approx 184 \text{ pc})$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{2 \cdot R_1}{d} \Rightarrow R_1 = \frac{d \cdot \tan \varphi_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3,79 \cdot 10^7 \text{ AE} \cdot \tan\left(\frac{0,026^\circ}{3600}\right) \approx 2,4 \text{ AE}$$

$$R_2 = \frac{d \cdot \tan \varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3,79 \cdot 10^7 \text{ AE} \cdot \tan\left(\frac{0,042^\circ}{3600}\right) \approx 3,9 \text{ AE}$$

$$b) L = \sigma \cdot 4R^2 \pi \cdot T^4 \Rightarrow L_1^* = \frac{L_1}{L_\odot} = \frac{R_1^2 \cdot T_1^4}{R_\odot^2 \cdot T_\odot^4} = \frac{(2,4 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot (3500 \text{ K})^4}{(1,39 \cdot 10^9 \text{ m})^2 \cdot (5800 \text{ K})^4} = 8,9 \cdot 10^3$$

$$L_2^* = \frac{L_2}{L_\odot} = \frac{R_2^2 \cdot T_2^4}{R_\odot^2 \cdot T_\odot^4} = \frac{(3,9 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot (3500 \text{ K})^4}{(1,39 \cdot 10^9 \text{ m})^2 \cdot (5800 \text{ K})^4} = 23 \cdot 10^3$$

c) Die Masse-Leuchtkraftbeziehung gilt nur für Hauptreihensterne und nicht für Rote Riesen.

Aufgabe zu Neutronensternen

a) Welche Dichte hat ein Proton mit der Masse $1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ und dem Radius $1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$?

b) Welchen Radius hätte die Sonne, wenn man sie auf die Dichte eines Neutronensterns mit ca. 10^8 t/cm^3 komprimieren könnte?

c) Eine rotierende Kugel der Masse M soll pro Sekunde 100 Umdrehungen ausführen. Welche Dichte muss die Kugel mindestens aufweisen, damit sie durch die Gravitationskraft zusammengehalten werden kann?

Lösung:

$$a) \text{ Dichte } \rho_{\text{Proton}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = \frac{1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \cdot (1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m})^3 \cdot \pi} = 1,5 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,5 \cdot 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$b) m_\odot = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} \text{ und } \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = 10^8 \frac{\text{t}}{\text{cm}^3} = 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{m}{\rho} \Rightarrow$$

$$r_\odot = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m_\odot}{4\pi \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{4\pi \cdot 10^{14} \text{ kg/cm}^3}} = 1,68 \dots \cdot 10^6 \text{ cm} \approx 17 \text{ km}$$

c) Für ein Massestück an der Oberfläche muss die Gravitationsanziehung größer sein als die benötigte Zentripetalkraft.

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r < G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 < \frac{G \cdot M}{r^3} = \frac{G \cdot M \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 < G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \Rightarrow \rho > \frac{4\pi^2 \cdot 3}{T^2 \cdot 4 \cdot G \cdot \pi} = \frac{\pi \cdot 3}{T^2 \cdot G} = \frac{\pi \cdot 3}{(0,01 \text{ s})^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}} = 1,4 \cdot 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Aufgabe Stellare Schwarze Löcher

Der Schwarzschildradius $R_s = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$ gibt an, innerhalb welchen Abstands ein Photon eine Masse

M nicht mehr verlassen kann. Bestimmen Sie für die Masse unserer Sonne den Schwarzschildradius!

$$\text{Lösung: } R_{s,\odot} = \frac{2 \cdot G \cdot M_\odot}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 3,0 \cdot 10^3 \text{ m} = 3,0 \text{ km}$$