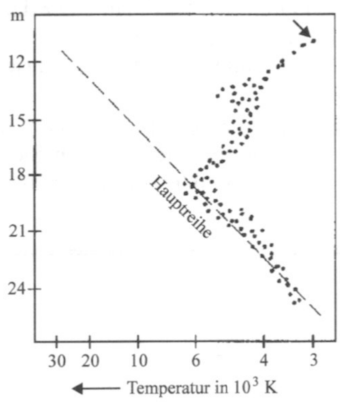
Q12 * Astrophysik * Klausur am 13.04.2011

1. Kapteyns Stern befindet sich im südlichen Sternbild Maler. Die H_α – Linie im Spektrum dieses Sterns hat die Wellenlänge 656,81 nm, der Laborwert dieser Linie liegt bei 656,28 nm.
   Folgende zusätzliche Daten des Sterns sind bekannt:
   scheinbare Helligkeit: 8,86 Parallaxe: 0,256´´
   Eigenbewegung: 8,67´´ pro Jahr

   a) Bestimmen Sie die Entfernung von Kapteyns Stern in pc und in Lichtjahren.
   b) Bestimmen Sie die Radial- und die Tangentialgeschwindigkeit des Sterns.
   c) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich Kapteyns Stern relativ zu Sonne? Nähert er sich unserer Sonne oder entfernt er sich?

Folgende Daten unserer Sonne dürfen – falls benötigt – für die folgende Aufgabe verwendet werden:
Spektralklasse G2, absolute Helligkeit $M = 4{,}8$, $T_\odot = 5800\,\mathrm{K}$, $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$.

2. Der Kugelsternhaufen M13 im Sternbild Herkules ist mit bloßem Auge gerade noch zu erkennen.
   Er erscheint unter einem Winkeldurchmesser von 15 Bogenminuten.
   Im vereinfachten HRD von M13 ist die scheinbare Helligkeit der Einzelsterne gegen die Oberflächentemperatur aufgetragen.



   a) Bestimmen Sie in dem Diagramm einen G2-Stern, der möglichst genau unserer Sonne entspricht und berechnen Sie dann die Entfernung dieses Sterns sowie den Durchmesser d von M13 in Lj. [Teilergebnis: r ≈ 23 kLj]
   b) Begründen Sie in Stichpunkten, warum sich auf dem linken oberen Teil der Hauptreihe keine Sterne von M13 befinden.
      Welche relative Leuchtkraft L^* gehört zu Hauptreihensternen am „Abknickpunkt“?
   c) Zeigen Sie, dass die Hauptreihensterne von M13 höchstens noch 1,4 Sonnenmassen haben.
   d) Bestimmen Sie nun näherungsweise das „Alter“ von M13. Verwenden Sie dabei, dass unsere Sonne etwa 9 Milliarden Jahre auf der Hauptreihe verweilt.
   e) Im HRD von M13 ist rechts oben ein Stern mit einem Pfeil markiert. Um welchen Sterntyp handelt es sich dabei?
      Schätzen Sie den Radius dieses Sterns in Vielfachen des Sonnenradius ab. Entnehmen Sie dazu benötigte Daten dem Diagramm.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	c	d	e	Summe
Punkte	3	6	3	6	6	3	3	6	36

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Astrophysik * Klausur am 13.04.2011 * Lösung

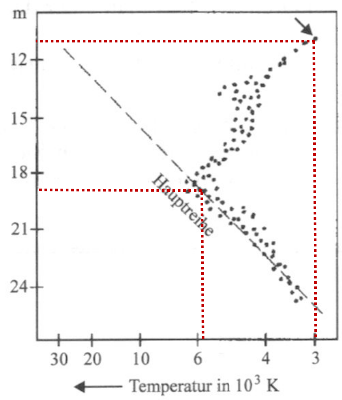
1. a) $r = \frac{1''}{p}\,pc = \frac{1''}{0{,}256''}\;pc = 3{,}9\,pc = \frac{1''}{0{,}256''}\cdot 3{,}26\,Lj = 13\,Lj$

   b) $\frac{v_{radial}}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \;\Rightarrow\; v_{radial} = 3{,}0\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}\cdot\frac{656{,}81-656{,}28}{656{,}28} = 2{,}4\cdot 10^{2}\,\frac{km}{s}$ von der Sonne weg.

   $v_{\text{tangential}} = v_t = \frac{r\cdot\tan 8{,}67''}{1a} = \frac{13\cdot 9{,}46\cdot 10^{15}m\cdot\tan 8{,}67''}{365\cdot 24\cdot 3600s} = 1{,}6\cdot 10^{2}\,\frac{km}{s}$

   c) Kapteyns Stern entfernt sich von unserer Sonne (Rotverschiebung) mit der Gesamtgeschwindigkeit $v = v_{ges} = \sqrt{v_{rad}{}^{2} + v_{\tan}{}^{2}} = \sqrt{2{,}4^{2}+1{,}6^{2}}\;\cdot 10^{2}\,\frac{km}{s} = 2{,}9\cdot 10^{2}\,\frac{km}{s}$.

2. a) Ein G2 Stern mit ca. 5800K Oberflächentemperatur hat etwa die scheinbare Helligkeit 19.



   $m - M = 5\cdot\lg\frac{r}{10\,pc} \;\Rightarrow\; \frac{r}{10\,pc} = 10^{\frac{m-M}{5}} = 10^{0{,}2\cdot(m-M)} \;\Rightarrow$

   $r = 10\,pc\cdot 10^{0{,}2\cdot(19-4{,}8)} \approx 6{,}9kpc \approx 23\,kLj$

   Durchmesser: $\frac{d}{r} = \tan 15' \;\Rightarrow$

   $d = 23\cdot 10^{3}\,Lj\cdot\tan\left(\frac{15}{60}\right)^{o} \approx 100\,Lj$

   b) Alle Sterne des Kugelsternhaufens sind gleichzeitig entstanden; die massereichsten Sterne der Hauptreihe (links oben) verbrauchten ihr Brennmaterial am schnellsten und erreichten zuerst das Stadium der roten Riesen. Für die Verweildauer τ auf der Hauptreihe gilt

   $\tau \sim \frac{1}{L}$ *und* $\tau \sim m$ *und* $L \sim m^{3} \;\Rightarrow\; \tau \sim \frac{1}{m^{2}}$ *bzw.* $\tau \sim \frac{1}{\sqrt[3]{L^{2}}}$.

   „Knick“ auf Hauptreihe bei scheinbarer Helligkeit $m_K \geq 18$. G2–Hauptreihenstern mit $M = 4{,}8$ hat $m \approx 19$, d.h. $M_K \geq 3{,}8$ also $L_{Knick}{}^{*} = \frac{L_K}{L_\odot} = 10^{0{,}4\cdot(M_\odot - M_K)} \leq 10^{0{,}4\cdot(4{,}8-3{,}8)} = 10^{0{,}4} \approx 2{,}5$

   c) Am Knickpunkt befinden sich die massereichsten Hauptreihensterne von M13 und damit gilt

   $L^{*} = (m^{*})^{3} \;\Rightarrow\; m^{*}{}_{K} = \sqrt[3]{L^{*}{}_{K}} \leq \sqrt[3]{2{,}5} = 1{,}4$

   d) Für die Verweildauer τ auf der Hauptreihe gilt damit

   $\tau \sim \frac{1}{m^{2}}$ also $\frac{\tau}{\tau_\odot} = \frac{\tau_K}{\tau_\odot} = \left(\frac{m_\odot}{m_K}\right)^{2} \approx \frac{1^{2}}{1{,}4^{2}}$ also $\tau \approx \frac{1^{2}}{1{,}4^{2}}\cdot\tau_\odot = \frac{1^{2}}{1{,}4^{2}}\cdot 9\cdot 10^{9}$ Jahre $\approx 5\cdot 10^{9}$ Jahre

   e) Es handelt sich um einen Roten Riesen mit $m \approx 11$ und $T \approx 3000$ K.
   Zu $m = 11$ gehört (wegen $M = 4{,}8$ hat $m \approx 19$) die absolute Helligkeit $M = 4{,}8 - 8 = -3{,}2$.

   Zu $M = -3{,}2$ gehört $L^{*} = \frac{L}{L_\odot} = 10^{0{,}4\cdot(M_\odot - M)} = 10^{0{,}4\cdot(4{,}8+3{,}2)} = 10^{3{,}2} \approx 1{,}6\cdot 10^{3}$

   Wegen $L \sim R^{2}\cdot T^{4}$ folgt $R \sim \frac{\sqrt{L}}{T^{2}}$ *also* $R^{*} = \sqrt{\frac{L}{L_\odot}}\cdot\frac{T_\odot{}^{2}}{T^{2}} \approx \sqrt{1{,}6\cdot 10^{3}}\cdot\frac{5800^{2}}{3000^{2}} \approx 150$