Q12 * Astrophysik * Bewegung von Himmelskörpern (Zusammenfassung)

Kreisbahn

„Leichter“ Körper (Masse m) bewegt sich auf Kreisbahn um einen „schweren“ Körper (Masse M).

Kraftansatz: Zentripetalkraft = Gravitationskraft

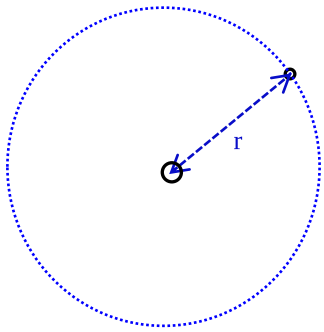
$$m \cdot \omega^2 \cdot r = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \text{mit} \quad v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \omega \cdot r$$

Kepler III: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$

Potentielle und kinetische Energie auf der Kreisbahn mit Radius r :

$$E_{pot} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r} \quad \left(\text{aus } E_{pot} = -\int_r^{\infty} \frac{G \cdot m \cdot M}{x^2}\, dx \right) \quad \text{und}$$

$$E_{kin} = \frac{G \cdot m \cdot M}{2 \cdot r} \quad \text{und} \quad E_{ges} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{2 \cdot r}$$



Kreisbahn

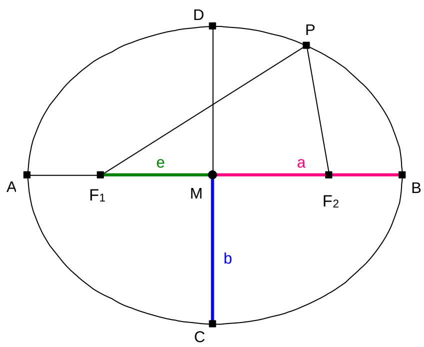
Ellipsenbahn

„Leichter“ Körper (Masse m) bewegt sich auf Ellipsenbahn um einen „schweren“ Körper (Masse M).

Ellipsen-Eigenschaften: $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = \text{konstant} = 2a$

Zudem gilt $a^2 = b^2 + e^2$ und $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ $(0 \le \varepsilon < 1)$

ε ist ein Maß für die Exzentrizität und für einen Kreis gilt $\varepsilon = 0$.



Kepler III: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$ und $E_{ges} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{2 \cdot a}$

Geschwindigkeit $v = v(r)$ des Satelliten auf der Ellipsenbahn:

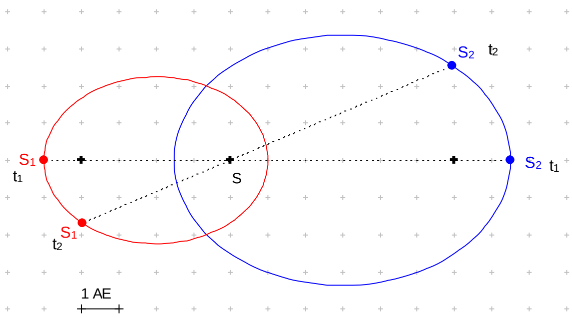
$$v = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \quad \left(\text{aus } E_{pot}(r) + E_{kin}(r) = E_{ges} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{2 \cdot a} \quad \text{mit } E_{pot}(r) = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r} \right)$$

Ellipsenbahnen

zweier etwa gleich schwerer Körper

Kepler III : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)}$

mit $a = a_1 + a_2$ und $m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2$



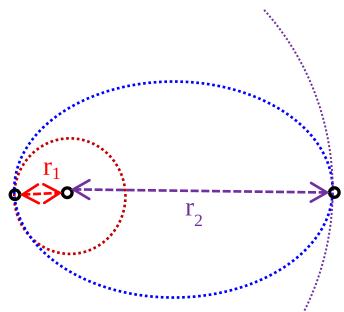
Hohmannbahn

Große Halbachse a_H der Hohmannbahn: $a_H = \frac{1}{2} \cdot (r_1 + r_2)$

Geschwindigkeit im Abstand r vom Zentralkörper:

$$v = v(r) = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Flugdauer T_F : $T_F = \frac{1}{2} \cdot T_{Hohmann}$ und $\frac{T_{Hohmann}^{\,2}}{a_H^{\,3}} = \frac{T_1^{\,2}}{r_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{r_2^{\,3}}$



Hohmannbahn