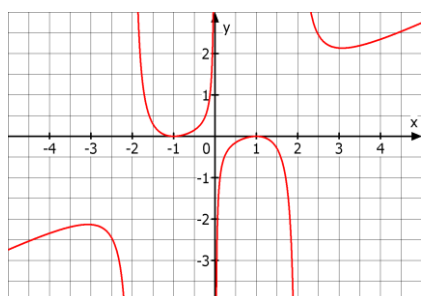


Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Gruppe A

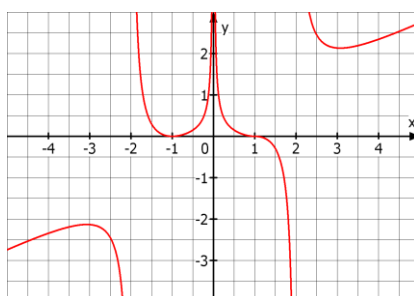


1. Die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 8x}$ soll untersucht werden.

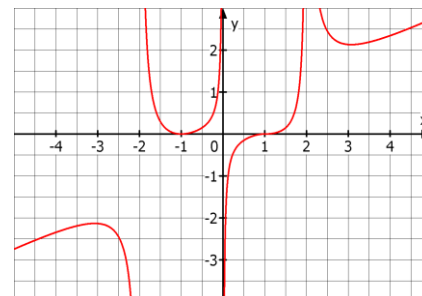
- Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f .
- Untersuchen Sie f an den Definitionslücken.
- Zeigen Sie, dass f für $x \rightarrow \pm \infty$ eine schräg liegende Asymptote besitzt und bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.
- Kann einer der drei abgebildeten Graphen zur Funktion f gehören? Begründen Sie, welche Graphen nicht in Frage kommen!



Graph 1



Graph 2



Graph 3


2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{3 + 2x}$.

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzialquotienten die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 / f(x_0))$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die den Graphen von f im Punkt $P(-1 / \dots)$ senkrecht schneidet.

3. Bestimmen Sie von der Funktion f mit $f(x) = 0,3x^4 - 1,6x^3 + 2,4x^2$ alle Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte.

Begründen Sie dabei geeignet, warum es sich um Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte handelt.

4. Lösen Sie diese Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

	Aufgabe	1a	b	c	d	2a	2b	3	4	Σ
	Punkte	4	6	4	3	6	4	8	6	41



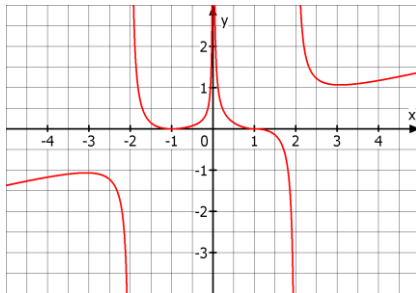
Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Gruppe B

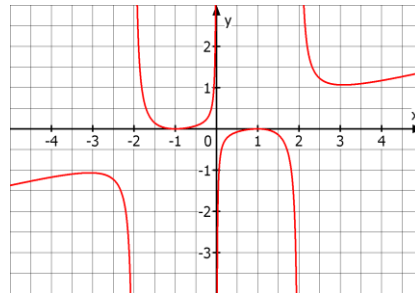


1. Die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^3 - 16x}$ soll untersucht werden.

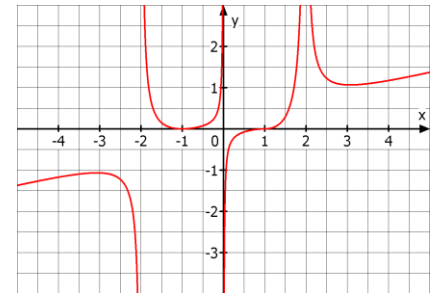
- Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f .
- Untersuchen Sie f an den Definitionslücken.
- Zeigen Sie, dass f für $x \rightarrow \pm \infty$ eine schräg liegende Asymptote besitzt und bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.
- Kann einer der drei abgebildeten Graphen zur Funktion f gehören? Begründen Sie, welche Graphen nicht in Frage kommen!



Graph 1



Graph 2



Graph 3

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{1 + 3x}$.

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzialquotienten die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 / f(x_0))$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die den Graphen von f im Punkt $P(1 / \dots)$ senkrecht schneidet.

3. Bestimmen Sie von der Funktion f mit $f(x) = 0,3x^4 + 1,6x^3 + 2,4x^2$ alle Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte.

Begründen Sie dabei geeignet, warum es sich um Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte handelt.

4. Lösen Sie diese Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

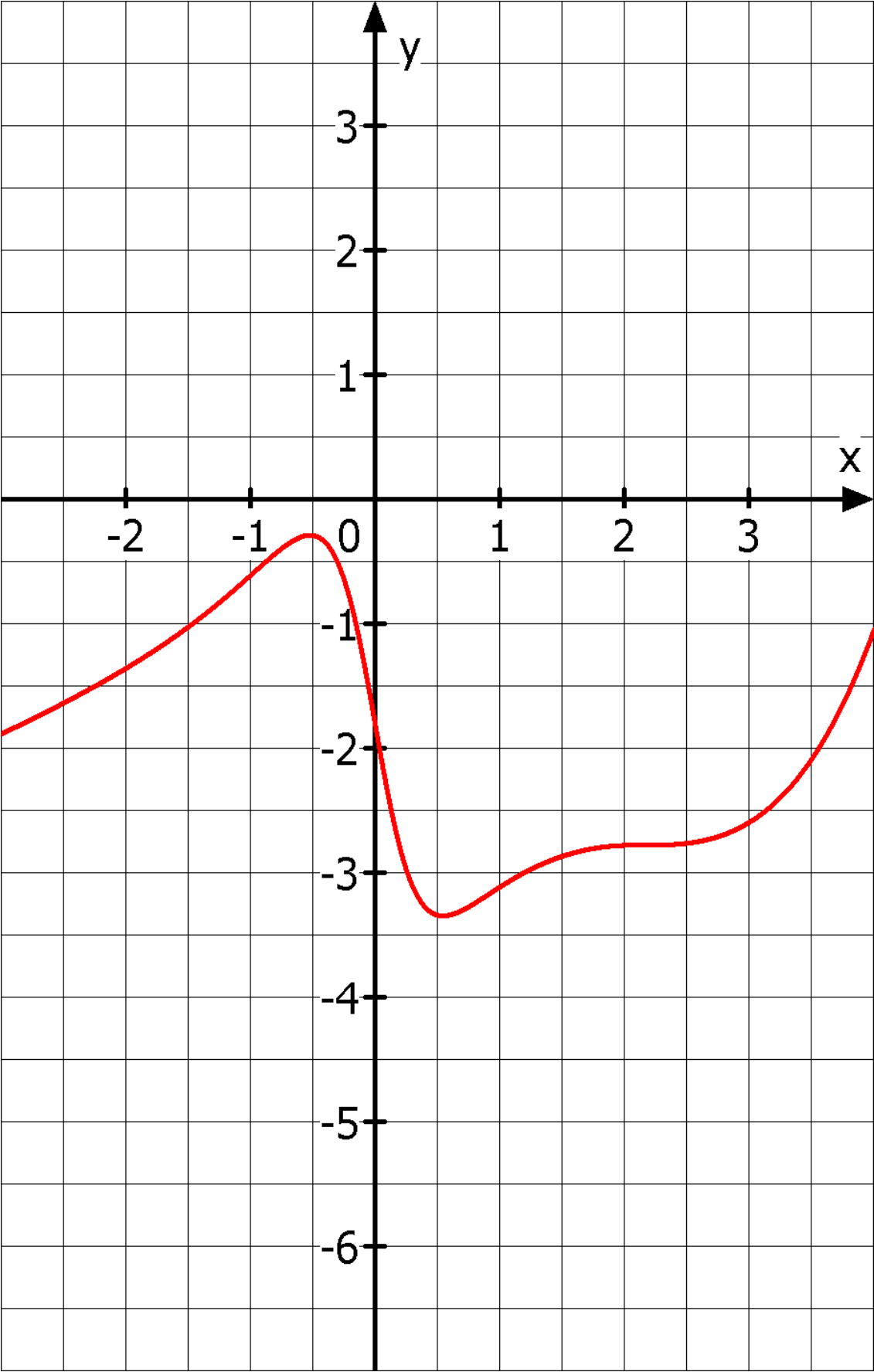
	Aufgabe	1a	b	c	d	2a	2b	3	4	Σ
	Punkte	4	6	4	3	6	4	8	6	41



Gutes Gelingen! G.R.

Name:

4. Das Bild zeigt den Graphen einer Funktion f . Tragen Sie möglichst genau den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion $f'(x)$ in das Bild ein!



Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Lösung * Gruppe A

1. a) $2x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x-2) \cdot (x+2) = 0$ also $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -2; 2\}$

NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 = 0$

Doppelte Nullstellen bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = -1$.

b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 8x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 1)^2}{2 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{9}{-4 \cdot (-4) \cdot (\pm 0)} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 8x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)^2}{2 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{9}{4 \cdot (\pm 0) \cdot 4} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)^2}{2 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{1}{2 \cdot (\pm 0) \cdot (-2) \cdot 2} = \mp \infty$

c) $(x^4 - 2x^2 + 1) : (2x^3 - 8x) = \frac{1}{2}x + \frac{2x^2 + 1}{2x^3 - 8x}$

$\frac{-(x^4 - 4x^2)}{2x^2 + 1}$ und wegen $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2 + 1}{2x^3 - 8x} = \pm 0$

ist damit $y = \frac{1}{2}x$ die Gleichung der schrägliegenden Asymptote für $x \rightarrow \pm \infty$.

d) Graph 2 scheidet aus, da f bei $x_0 = 0$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat.

Graph 3 scheidet aus, da f bei $x_3 = 2$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat.

Graph 1 erfüllt alle Anforderungen an Asymptoten und Nullstellen und ist damit möglich.

2. a) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4}{3+2x} - \frac{4}{3+2x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4 \cdot (3+2x_0) - 4 \cdot (3+2x)}{(3+2x) \cdot (3+2x_0)}}{x - x_0} =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{12 + 8x_0 - 12 - 8x}{(3+2x) \cdot (3+2x_0) \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-8 \cdot (x - x_0)}{(3+2x) \cdot (3+2x_0) \cdot (x - x_0)} =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-8}{(3+2x) \cdot (3+2x_0)} = \frac{-8}{(3+2x_0) \cdot (3+2x_0)} = \frac{-8}{(3+2x_0)^2}$ also $f'(x) = \frac{-8}{(3+2x)^2}$

b) $f(-1) = \frac{4}{3-2 \cdot 1} = 4$ und $m = -\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{(3-2)^2}{-8} = \frac{1}{8}$ also $y = \frac{1}{8}x + t$ und $(-1/4)$ eingesetzt

liefert $t = 4 - \frac{1}{8} \cdot (-1) = 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$ also lautet die Geradengleichung $y = \frac{1}{8}x + \frac{33}{8}$

3. $f(x) = 0,3x^4 - 1,6x^3 + 2,4x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,2x^3 - 4,8x^2 + 4,8x = 1,2x \cdot (x^2 - 4x + 4)$

$f'(x) = 1,2x \cdot (x-2)^2$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ (doppelte Nullstelle von f')

x	x < 0	x = 0	0 < x < 2	x = 2	2 < x
$f'(x) = 1,2x \cdot (x-2)^2$	< 0	0	> 0	0	> 0
G_f	str. monoton fallend	TIP(0/f(0))	str. monoton steigend	TP(2/f(2))	str. monoton steigend

$f(x) = 0,3x^4 + 1,6x^3 + 2,4x^2$ und damit $f(0) = 0$ und

$f(2) = 0,3 \cdot 16 - 1,6 \cdot 8 + 2,4 \cdot 4 = 4,8 - 12,8 + 9,6 = 14,4 - 12,8 = 1,6$

Terrassenpunkt $(2/1,6)$ und Tiefpunkt $(0/0)$

Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 11.11.2016 * Lösung * Gruppe B

1. a) $4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot (x-2) \cdot (x+2) = 0$ also $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -2; 2\}$

NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x+1)^2 = 0$

Doppelte Nullstellen bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = -1$.

b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^3 - 16x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 1)^2}{4 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{9}{-8 \cdot (-4) \cdot (\pm 0)} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^3 - 16x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1)^2}{4 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{9}{8 \cdot (\pm 0) \cdot 4} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^3 - 16x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)^2}{4 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x+2)} = \frac{1}{4 \cdot (\pm 0) \cdot (-2) \cdot 2} = \mp \infty$

c) $(x^4 - 2x^2 + 1) : (4x^3 - 16x) = \frac{1}{4}x + \frac{2x^2 + 1}{4x^3 - 16x}$

$\frac{-(x^4 - 4x^2)}{2x^2 + 1}$ und wegen $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2 + 1}{4x^3 - 16x} = \pm 0$

ist damit $y = \frac{1}{4}x$ die Gleichung der schrägliegenden Asymptote für $x \rightarrow \pm \infty$.

d) Graph 1 scheidet aus, da f bei $x_0 = 0$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat.

Graph 3 scheidet aus, da f bei $x_3 = 2$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel hat.

Graph 2 erfüllt alle Anforderungen an Asymptoten und Nullstellen und ist damit möglich.

2. a) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2}{1+3x} - \frac{2}{1+3x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2 \cdot (1+3x_0) - 2 \cdot (1+3x)}{(1+3x) \cdot (1+3x_0)}}{x - x_0} =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 + 6x_0 - 2 - 6x}{(1+3x) \cdot (1+3x_0) \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-6 \cdot (x - x_0)}{(1+3x) \cdot (1+3x_0) \cdot (x - x_0)} =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-6}{(1+3x) \cdot (1+3x_0)} = \frac{-6}{(1+3x_0) \cdot (1+3x_0)} = \frac{-6}{(1+3x_0)^2}$ also $f'(x) = \frac{-6}{(1+3x)^2}$

b) $f(1) = \frac{2}{1+3 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ und $m = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{4^2}{-6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ also $y = \frac{8}{3}x + t$; $(1/\frac{1}{2})$ eingesetzt

liefert $t = \frac{1}{2} - \frac{8}{3} = \frac{3-16}{6} = -\frac{13}{6}$ also lautet die Geradengleichung $y = \frac{8}{3}x - \frac{13}{6}$

3. $f(x) = 0,3x^4 + 1,6x^3 + 2,4x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,2x^3 + 4,8x^2 + 4,8x = 1,2x \cdot (x^2 + 4x + 4)$

$f'(x) = 1,2x \cdot (x+2)^2$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ (doppelte Nullstelle von f')

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f'(x) = 1,2x \cdot (x+2)^2$	< 0	0	< 0	0	> 0
G_f	str. monoton fallend	TP(-2 / f(-2))	str. monoton fallend	TIP(0/f(0))	str. monoton steigend

$f(x) = 0,3x^4 + 1,6x^3 + 2,4x^2$ und damit $f(0) = 0$ und

$f(-2) = 0,3 \cdot 16 - 1,6 \cdot 8 + 2,4 \cdot 4 = 4,8 - 12,8 + 9,6 = 14,4 - 12,8 = 1,6$

Terrassenpunkt $(-2/1,6)$ und Tiefpunkt $(0/0)$

