Q11 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 20.12.2016 * Gruppe A

1. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{2x^2+1}}$ soll untersucht werden.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Schnittstellen des Graphen mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

   b) Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte des Graphen von f.

   c) Skizzieren Sie den Graphen!

2. Die Funktion f_k mit $f_k(x) = 0{,}5x^3 - kx^2 + 6x$ mit $k \in R$ soll in Abhängigkeit von k untersucht werden.

   a) Für welche Werte von k besitzt der Graph von f_k einen Hoch- <u>und</u> einen Tiefpunkt.

   b) Der Graph von f_k soll für ein $k > 0$ einen Terrassenpunkt besitzen.
   Bestimmen Sie einen passenden positiven Wert für k und berechnen Sie dann die Koordinaten dieses Terrassenpunktes.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	$\sum$
Punkte	6	8	4	4	5	27

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 20.12.2016 * Gruppe B

1. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x+4}{\sqrt{2x^2+1}}$ soll untersucht werden.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Schnittstellen des Graphen mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

   b) Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte des Graphen von f.

   c) Skizzieren Sie den Graphen!

2. Die Funktion f_k mit $f_k(x) = 0{,}5x^3 + kx^2 + 6x$ mit $k \in R$ soll in Abhängigkeit von k untersucht werden.

   a) Für welche Werte von k besitzt der Graph von f_k einen Hoch- <u>und</u> einen Tiefpunkt.

   b) Der Graph von f_k soll für ein $k > 0$ einen Terrassenpunkt besitzen.
   Bestimmen Sie einen passenden positiven Wert für k und berechnen Sie dann die Koordinaten dieses Terrassenpunktes.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	$\sum$
Punkte	6	8	4	4	5	27

Gutes Gelingen! G.R.

1. a) $f(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{2x^2+1}}$; $D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$; $f(0) = \dfrac{2}{\sqrt{1}} = 2$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{2}\cdot|x|} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot x}{\pm x} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$$

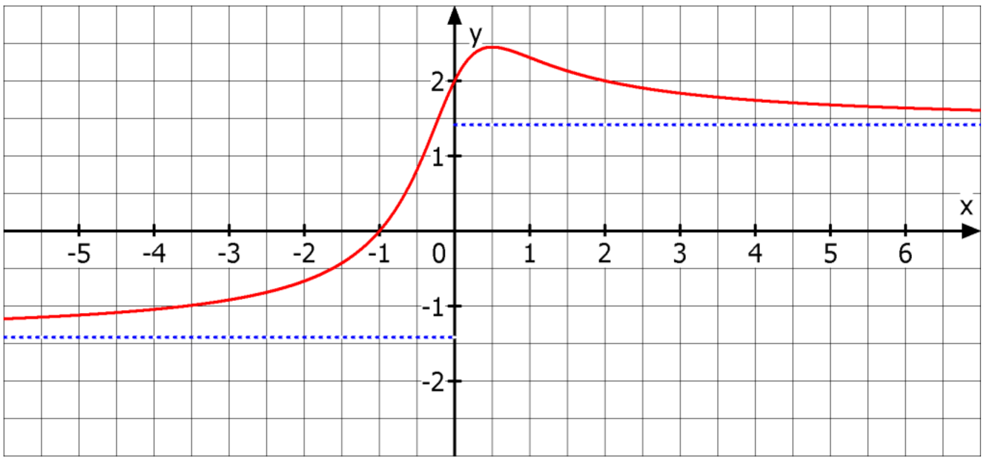
b) $$f'(x) = \frac{2\cdot\sqrt{2x^2+1} - (2x+2)\cdot\dfrac{4x}{2\cdot\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = \frac{2\cdot(2x^2+1) - (2x+2)\cdot 2x}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}} =$$

$$\frac{4x^2+2-4x^2-4x}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2-4x}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2\cdot(1-2x)}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0{,}5 \;;\; y_2 = f(0{,}5) = \frac{2\cdot 0{,}5+2}{\sqrt{2\cdot 0{,}25+1}} = \frac{3}{\sqrt{1{,}5}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

x	$x < 0{,}5$	$x = 0{,}5$	$0{,}5 < x$
$f'(x) = \dfrac{2\cdot(1-2x)}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}}$	> 0	0	< 0
G_f	streng monoton steigend	$HOP(0{,}5 / f(0{,}5))$ $= (\,0{,}5 / \sqrt{6}\,)$	streng monoton fallend

c)



2. a) $f_k(x) = 0{,}5x^3 - kx^2 + 6x \Rightarrow f_k'(x) = 1{,}5x^2 - 2kx + 6$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 - 2kx + 6 = 0$ muss zwei einfache Nullstellen besitzen, d.h.

$D = (-2k)^2 - 4\cdot 1{,}5\cdot 6 > 0 \Leftrightarrow 4k^2 > 4\cdot 1{,}5\cdot 6 \Leftrightarrow k^2 > 9 \Leftrightarrow |k| > 3$ also $k \in \mathbb{R}\setminus[-3\,;\,3]$

b) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 - 2kx + 6 = 0$ muss eine doppelte Nullstellen besitzen, d.h.

$D = (-2k)^2 - 4\cdot 1{,}5\cdot 6 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 = 4\cdot 9 \Leftrightarrow k^2 = 9 \overset{k>0}{\Leftrightarrow} k = +3$

$f_3'(x) = 1{,}5x^2 - 2\cdot 3x + 6 = 1{,}5\cdot(x^2 - 4x + 4) = 1{,}5\cdot(x-2)^2$ also

$TP(2 / f_3(2))$ und $f_3(2) = 0{,}5\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 6\cdot 2 = 4$

also Terrassenpunkt $TP(\,2 / 4\,)$ für $k = 3$.

Q11 * Mathematik m1 * 1. Stegreifaufgabe am 20.12.2016 * Gruppe B * Lösung

1. a) $f(x) = \dfrac{2x+4}{\sqrt{2x^2+1}}$; $D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$; $f(0) = \dfrac{4}{\sqrt{1}} = 4$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{2}\,x}{\pm x} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$$

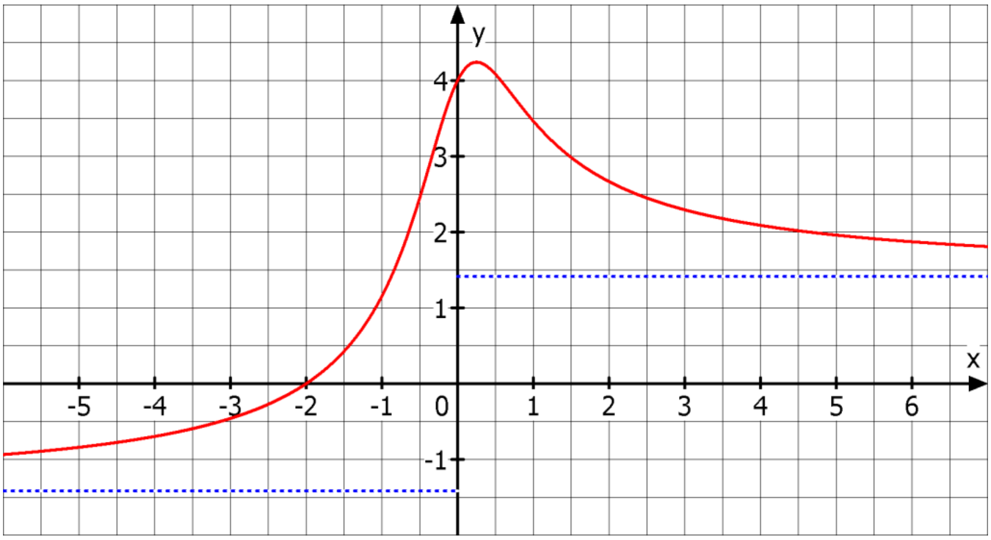
b) $$f'(x) = \frac{2\cdot\sqrt{2x^2+1} - (2x+4)\cdot\dfrac{4x}{2\cdot\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = \frac{2\cdot(2x^2+1) - (2x+4)\cdot 2x}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}} =$$

$$\frac{4x^2+2-4x^2-8x}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2-8x}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2\cdot(1-4x)}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-4x = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0{,}25$; $y_2 = f(0{,}25) = \dfrac{4{,}5}{\sqrt{1{,}125}} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$

x	$x < 0{,}25$	$x = 0{,}25$	$0{,}25 < x$
$f'(x) = \dfrac{2\cdot(1-4x)}{(2x^2+1)\cdot\sqrt{2x^2+1}}$	> 0	0	< 0
G_f	streng monoton steigend	HOP$(0{,}5 / f(0{,}25))$ $= (0{,}25 / 3\sqrt{2})$	streng monoton fallend

c)



2. a) $f_k(x) = 0{,}5x^3 + kx^2 + 6x \Rightarrow f_k'(x) = 1{,}5x^2 + 2kx + 6$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 2kx + 6 = 0$ muss zwei einfache Nullstellen besitzen, d.h.

$D = (2k)^2 - 4\cdot 1{,}5\cdot 6 > 0 \Leftrightarrow 4k^2 > 4\cdot 1{,}5\cdot 6 \Leftrightarrow k^2 > 9 \Leftrightarrow |k| > 3$ also $k \in \mathbb{R} \setminus [-3\,;3]$

b) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 2kx + 6 = 0$ muss eine doppelte Nullstellen besitzen, d.h.

$D = (2k)^2 - 4\cdot 1{,}5\cdot 6 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 = 4\cdot 9 \Leftrightarrow k^2 = 9 \overset{k>0}{\Leftrightarrow} k = +3$

$f_3'(x) = 1{,}5x^2 + 2\cdot 3x + 6 = 1{,}5\cdot(x^2 + 4x + 4) = 1{,}5\cdot(x+2)^2$ also

TP$(-2 / f_3(-2))$ und $f_3(-2) = 0{,}5\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 + 6\cdot(-2) = -4$

also Terrassenpunkt TP$(-2/-4)$ für $k=3$.