

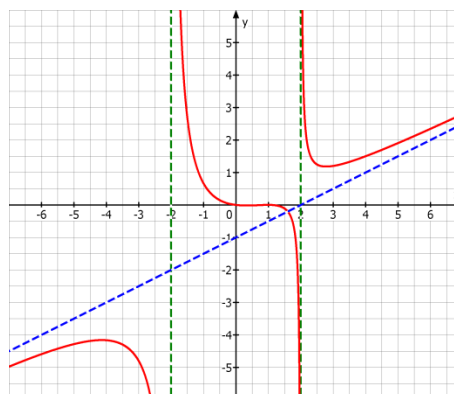
## Q11 \* Mathematik \* Gebrochen rationale Funktionen \* Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^2 - 8}$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von  $f$ .

Untersuchen Sie dann das Verhalten des Graphen an den Rändern des Definitionsbereichs, d.h. an den Definitionslücken sowie für  $x \rightarrow \pm \infty$ .

Skizzieren Sie dann den Graphen von  $f$  und vergleichen Sie Ihre Skizze mit dem Bild, das ein Funktionsplotter für  $f$  zeigt.



2. Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen an den Definitionslücken sowie für  $x \rightarrow \pm \infty$ .  
Skizzieren Sie den Graphen und prüfen Sie Ihre Skizze mit Hilfe eines Funktionsplotters.

a)  $f(x) = \frac{2-x}{0,2x^2-1}$       b)  $g(x) = \frac{0,5x^2-2}{1-x}$       c)  $h(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2+1}$

d)  $k(x) = \frac{x}{2x-4} - \frac{x^2+1}{x}$       e)  $m(x) = \frac{2+x+0,5x^2}{x^2-4}$       f)  $n(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2x-1}$

3. Geben Sie den Term einer (möglichst einfachen) gebrochen rationalen Funktion  $f$  an, die folgende Eigenschaften besitzt.
- Der Graph von  $f$  hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei  $x_1 = 2$  und für  $x \rightarrow \pm \infty$  die Asymptote  $y = 0,5$ .
  - Der Graph von  $f$  hat Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 2$  und für  $x \rightarrow \pm \infty$  die Asymptote  $y = 0,5x - 1$ .
  - Der Graph von  $f$  hat eine Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei  $x_1 = -2$ , ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat für  $x \rightarrow \pm \infty$  die Asymptote  $y = 0$ .
  - Der Graph von  $f$  hat eine Polstelle bei  $x_1 = 0$  und ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse. Für  $x \rightarrow \pm \infty$  hat der Graph die Asymptote  $y = 0$  und bei  $x_2 = 2$  befindet sich eine Nullstelle.

Weitere lehrreiche Aufgaben aus dem Buch:

S. 17 / Nr. 4, 7, 8

S. 18 / Nr. 10

S. 21 / Nr. 3, 4, 6



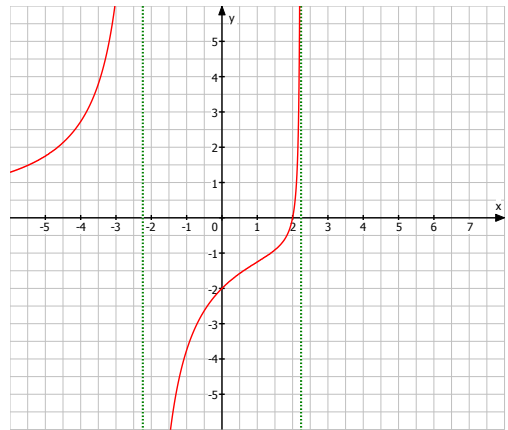
**Q11 \* Mathematik \* Gebrochen rationale Funktionen \* Lösungen**

2. a)  $f(x) = \frac{2-x}{0,2x^2-1}$ ;  $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\sqrt{5} \\ x \rightarrow -\sqrt{5}}} f(x) = \frac{2-\sqrt{5}}{0^\pm} = \mp \infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\sqrt{5} \\ x \rightarrow -\sqrt{5}}} f(x) = \frac{2+\sqrt{5}}{0^\mp} = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}{0,2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 \pm 0}{0,2 - 0} = 0$$

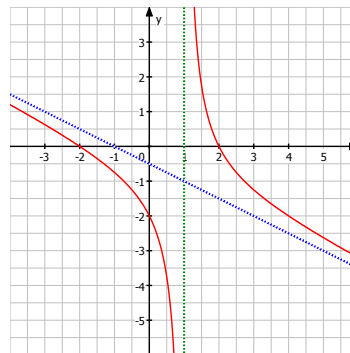


b)  $g(x) = \frac{0,5x^2-2}{1-x}$ ;  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 1}} f(x) = \frac{-1,5}{0^\mp} = \pm \infty$$

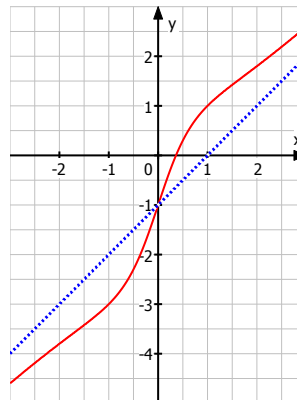
$$g(x) = \frac{0,5x^2-2}{1-x} = -0,5x - 0,5 + \frac{1,5}{x-1}$$

Asymptote  $y = -0,5x - 0,5$



c)  $h(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2+1}$ ;  $D = \mathbb{R}$

Asymptote  $y = x - 1$



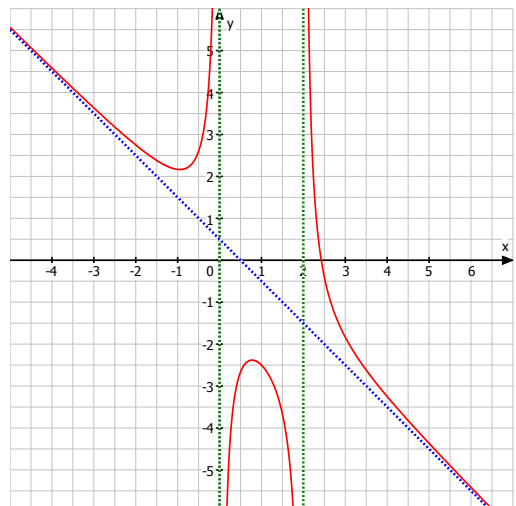
d)  $k(x) = \frac{x}{2x-4} - \frac{x^2+1}{x}$ ;  $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

$$k(x) = \frac{-2x^3+5x^2-2x+4}{2x \cdot (x-2)} = -x + 0,5 + \frac{2}{x \cdot (x-2)}$$

Asymptote  $y = -x + 0,5$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} k(x) = \frac{4}{0^\pm \cdot (-2)} = \mp \infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 2}} k(x) = \frac{-16+20-4+4}{8 \cdot 0^\pm} = \pm \infty$$



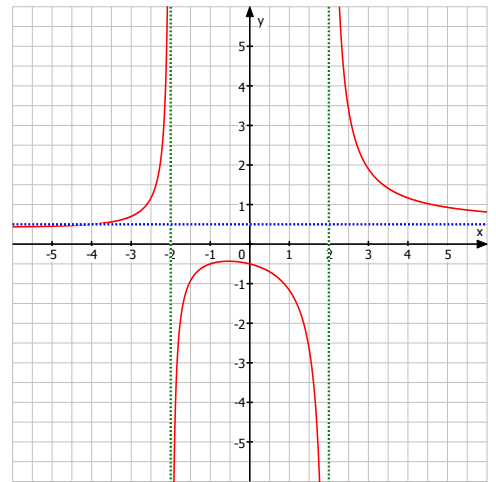
$$e) m(x) = \frac{2+x+0,5x^2}{x^2-4} = \frac{2+x+0,5x^2}{(x-2)\cdot(x+2)}; D=\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} m(x) = \frac{2-2+2}{(-4)\cdot 0^{\pm}} = \mp \infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} m(x) = \frac{2+2+2}{0^{\pm} \cdot 4} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} m(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 0,5}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0 \pm 0 + 0,5}{1-0} = 0,5$$

Asymptote  $y = 0,5$



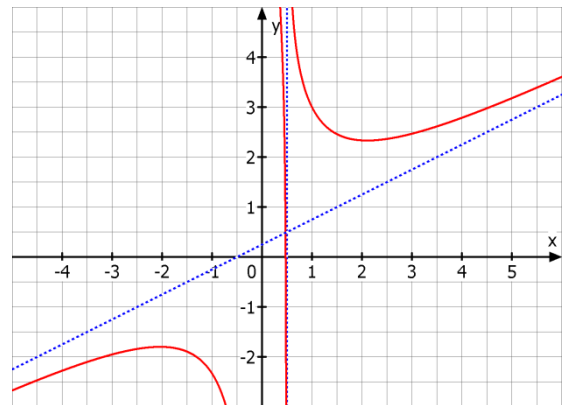
$$f) n(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2x-1} = \frac{x^3+4x-2}{x\cdot(2x-1)}; D=\mathbb{R}\setminus\{0; 0,5\}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} n(x) = \frac{0+0-2}{0^{\pm} \cdot (-1)} = \pm \infty$$

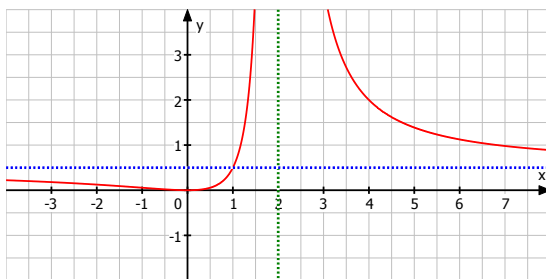
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0,5 \\ x < 0,5}} n(x) = \frac{0,125+2-2}{0,5 \cdot 0^{\pm}} = \pm \infty$$

$$n(x) = \frac{x^3+4x-2}{2x^2-x} = 0,5x + \frac{1}{4} + \frac{4,25x-2}{2x^2-2}$$

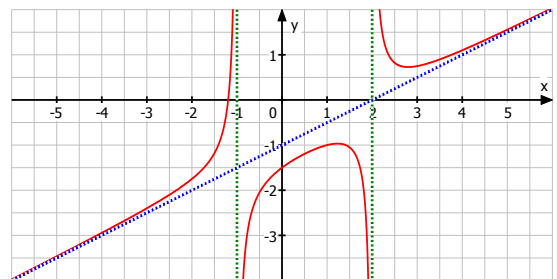
Asymptote  $y = 0,5x$



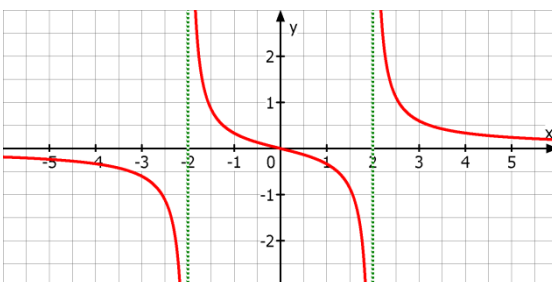
$$3. a) f(x) = \frac{0,5x^2}{(x-2)^2}$$



$$b) f(x) = 0,5x - 1 + \frac{1}{(x+1)\cdot(x-2)}$$



$$c) f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$



$$d) f(x) = \frac{x^2-4}{x^4}$$

