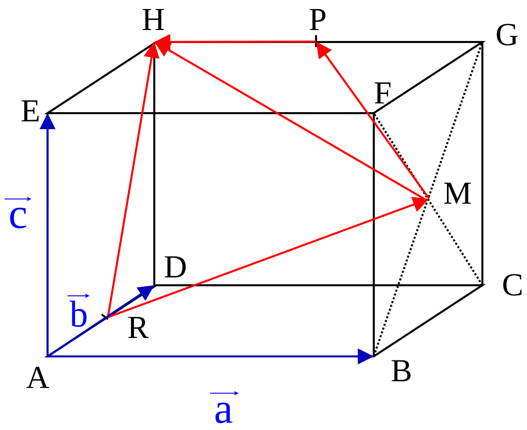
Q11 * Mathematik * Rechnen mit Vektoren

1. Das Bild zeigt einen Quader ABCDEFGH.

   R halbiert die Strecke [AD] und P halbiert die Strecke [HG].
   M ist der Mittelpunkt des Rechtecks BCGF.

   Stellen Sie die Vektoren
   $\overrightarrow{PH}$, $\overrightarrow{RH}$, $\overrightarrow{RM}$, $\overrightarrow{MH}$ und $\overrightarrow{MP}$ als

   Linearkombination der drei Vektoren
   $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ dar.



2. Bestimmen Sie die Lösung $\vec{x}$ der Vektorgleichung.

   a) $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \vec{x} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \vec{x} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Berechnen Sie – sofern möglich – den Wert von r.

   a) $r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

4. Gegeben sind die Punkte A(2 / -3 / 4), B(-1 / 1 / 0) und C(4 / 0 / -2).

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M_a der Strecke [BC].

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S des Dreiecks ABC.
   (Hinweis: Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden.)

   c) Das Dreieck ABC lässt sich auf verschiedene Weise zu einem Parallelogramm ergänzen.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Punktes dieses Parallelogramms.

5. Gegeben sind die Punkte A(1 / -2 / 3) , B(5 / 4 / -2) und C(3 / 2 / 6).

   a) Begründen Sie, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen und damit eine Ebene E im Raum festlegen.

   b) Prüfen Sie ob die Punkte S(1 / 0 / 14) bzw. T(2 / 3 / 4) in dieser Ebene E liegen.

Q11 * Mathematik * Rechnen mit Vektoren * Lösungen

1. $\overrightarrow{PH} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{a}$; $\overrightarrow{RH} = \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{RM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c}$;
$\overrightarrow{MH} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c}$; $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c}$

2. a) $$2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} - 0{,}5\cdot\vec{x} = 3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = 4\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}-16\\8\\-6\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} + 2\cdot\vec{x} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$$

3. a) $$r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 2$$

b) $$r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} \quad \begin{cases} r = 2\\ r = -2\\ r = 2\end{cases} \quad \text{keine Lösung}$$

c) $$\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} - r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix} \Leftrightarrow r = -1{,}5$$

d) $$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} \quad \begin{cases} r = 0{,}5\\ r = 0{,}5\\ r = 0{,}75\end{cases} \quad \text{keine Lösung!}$$

4. a) $$\overrightarrow{M_a} = \vec{B} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{C}+\vec{B}) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\0{,}5\\-1\end{pmatrix} \quad \text{also} \quad M_a = (1{,}5\,/\,0{,}5\,/\,-1)$$

b) $$\vec{S} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix} \quad \text{also} \quad S\left(\frac{5}{3}\,/\,-\frac{2}{3}\,/\,\frac{2}{3}\right)$$

c) $\overrightarrow{D_1} = \vec{A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \vec{A} + \vec{C} - \vec{B} \Rightarrow D_1(7/-4/2)$
$\overrightarrow{D_2} = \vec{A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{B} + \vec{C} - \vec{A} \Rightarrow D_2(1/\,4/-6)$
$\overrightarrow{D_3} = \vec{A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} \Rightarrow D_3(-3/-2/6)$

5. a) $$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix}4\\6\\-5\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r\cdot\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC} \quad \text{für jedes } r \neq 0\,.$$
Damit spannen die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ eine Ebene E auf.

b) Für S(1 / 0 / 14) gilt: $\vec{S} = \vec{A} + (-1)\cdot\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AC}$ d.h. S liegt in der Ebene E.
$\vec{T} = \vec{A} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}$ hat keine Lösung für r und s, d.h. T liegt nicht in der Ebene E.