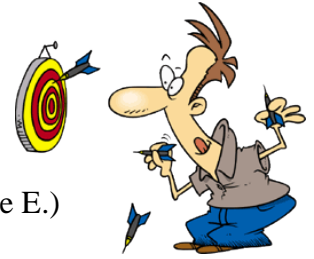


Q11 * Mathematik * „Anspruchsvolles“ Rechnen mit Vektoren

1. Gegeben sind die Punkte $A(1/-1/3)$, $B(5/2/-2)$, $C(-1/1/2)$ und $S(2/2/4)$.

- Begründen Sie, dass der Punkt S nicht in der durch A , B und C festgelegten Ebene E liegt.
- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes S von der Ebene E .
(Hinweis: Ermitteln Sie den Fußpunkt F des Lotes von S auf die Ebene E .)
- Skizzieren Sie die Lage des Punktes F im Dreieck ABC .
- Begründen Sie, dass die Kugel mit Mittelpunkt S und Radius $r = 5$ die Ebene E in einem Kreis mit dem Radius ρ schneidet und ermitteln Sie die Größe von ρ .



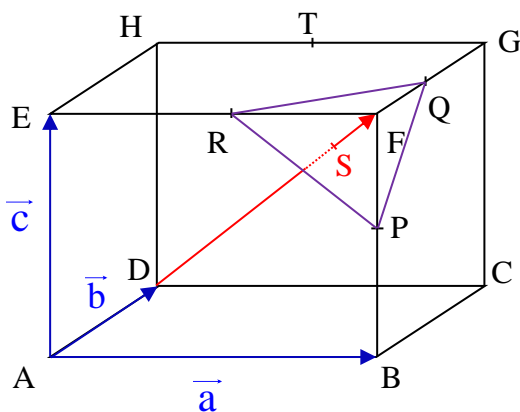
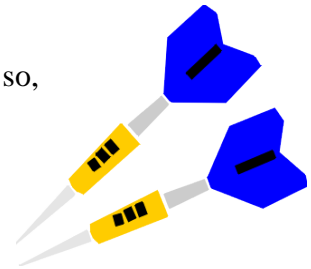
2. Gegeben sind die Punkte $A(-1/-3/6)$, $B(-1/2/1)$, $C(6/1/0)$ und $D(0/4/6)$.

- Zeigen Sie, dass die Geraden AB und CD windschief zueinander sind.
- Bestimmen Sie den Abstand dieser beiden windschiefen Geraden voneinander.
(Hinweis: Die zum Abstand gehörende Strecke muss auf beiden Geraden senkrecht stehen.)

3. Gegeben sind die beiden Punkte $A(1/2/3)$ und $B(2/6/-5)$.

Finden Sie jeweils Punkte C und D mit ganzzahligen Koordinaten so, dass gilt

- $ABCD$ ist eine Raute,
- $ABCD$ ist ein Rechteck,
- $ABCD$ ist ein Quadrat,
- $ABCD$ ist ein gleichschenkliges Trapez, das kein Rechteck ist.



4. Rechnen mit linear unabhängigen Vektoren.

Das Bild zeigt einen Quader $ABCDEFGH$, und die Punkte P , Q , R und T halbieren jeweils die Kanten dieses Quaders.

- Die Punkte P , Q und R legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie (mit Hilfe der blauen Vektoren) die Lage des Schnittpunktes S der Geraden DF mit dieser Ebene auf geeignete Weise.
 - In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $[DF]$?
Wie lang ist die Strecke DS , falls $a = 9$ und $b = c = 6$ gilt.
 - Begründen Sie ohne Rechnung, dass sich die Geraden AT und PH nicht schneiden.
- d) Begründen Sie (ohne Vektorrechnung), dass sich die Geraden HB und TA in einem Punkt N schneiden. In welchem Verhältnis teilt N die Strecke $[AT]$?

Q11 * Mathematik * „Anspruchsvolles“ Rechnen mit Vektoren

Lösungen

1. a) Es gibt keine $s, t \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{AS} = s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Der Fußpunkt F hat die Koordinaten $F(1/0/2)$.

Der Abstand beträgt daher $d = |\overrightarrow{FS}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

c) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{7} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{7} \overrightarrow{AC}$

d) $r > d \Rightarrow$ Schnittkreis mit Radius ρ und

$$\rho^2 + d^2 = r^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$



2. a) $\overrightarrow{AB} \neq t \cdot \overrightarrow{CD}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\overrightarrow{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{C} + s \cdot \overrightarrow{CD}$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$

b) Die Fußpunkte der „Lotstrecke“ $[F_1F_2]$ haben die Koordinaten $F_1(-1/1/2)$ und $F_2(2/3/4)$.

Der Abstand beträgt also $d = |\overrightarrow{F_1F_2}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$.

3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+16+64} = 9$ und z.B. $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

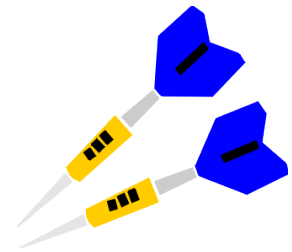
a) Wähle z.B. $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d.h. auch $|\overrightarrow{AD}| = 9$ und $\overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 1+8 \\ 2+4 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ also $D(9/6/4)$.

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow C(10/10/-4)$$

b) $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{B} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{B} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) Mit Ergebnissen aus b) z.B. $\overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}$



4. a) $\overrightarrow{AS} = \frac{5}{6} \cdot \vec{a} + \frac{1}{6} \cdot \vec{b} + \frac{5}{6} \cdot \vec{c}$

b) S teilt die Strecke $[DF]$ im Verhältnis $\overline{DS} : \overline{SF} = 5 : 1$.

$$\overline{DS} = \frac{5}{6} \cdot \overline{DF} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{9^2 + 6^2 + 6^2} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{17}$$

c) Gerade AT liegt im Rechteck ABGH und die Gerade PH liegt nicht in dieser vom Rechteck bestimmten Ebene und schneidet diese Ebene nur in dem einen Punkt H.

d) HB und AT liegen beide in der durch das Rechteck ABGH festgelegten Ebene. Da HB und AT nicht parallel sind, schneiden sie sich.

N teilt die Strecke $[AT]$ im Verhältnis $\overline{AN} : \overline{NT} = \overline{AB} : \overline{HT} = 2 : 1$.