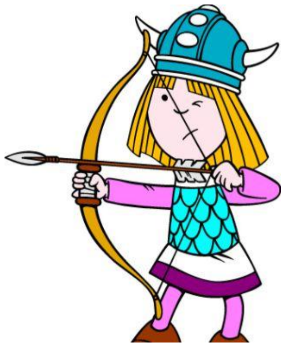
Q11 * Mathematik * Vermischte Aufgaben zur Vektorrechnung

1. Gegeben sind die Punkte A(1 / 8 / – 2), B(4/ – 1 / 4), C(7 / 4 / 3) .



   a) Zeigen Sie, dass A, B und C ein Dreieck ABC bilden und berechnen Sie die Länge c der Seite [AB] und den Winkel $\beta = \sphericalangle CBA$.
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A_{\Delta ABC}$ des Dreiecks ABC.
   c) Die Höhe h_c schneidet die Gerade AB im Punkt F. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Fußpunktes F .
   d) Spiegelt man den Punkt C an der Geraden AB, so erhält man C*. Bestimmen Sie die Koordinaten von C*.
   e) Durch das Dreieck ABC ist die Ebene E festgelegt. Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P, der von der Ebene E den Abstand $3\cdot\sqrt{6}$ hat.

2. Gegeben sind die Punkte A(1 / 2 / –3), B(6 / – 2 / 8) und C(5 / 6 / 4).
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig mit Hypotenuse [AB] ist.
   b) Bestimmen Sie die Seitenmitten der Seite [BC] und bzw. [AC].
   c) Die Mittelsenkrechte m_b und die Seitenhalbierende s_a schneiden sich in einem Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes S.

3. Gegeben sind die Punkte A(1 / 2 / –3), B(2 / –1 / 3) , C(3 / 2 / 1) und D(5 / 2 / 0) .
   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCD.
   c) Welchen Abstand hat der Punkt D von der durch A, B und C festgelegten Ebene E ?
   d) Prüfen Sie, ob die Kugel mit Mittelpunkt D und dem Radius r = 5 die Ebene E schneidet. Wenn ja, berechnen Sie den Radius ρ des Schnittkreises.

4. Gegeben sind die Punkte A(1 / 2 / 4), B(5 / 6 / 2) und C_k(3 + 2k / 4 – k / 3 + 2k).
   a) Welche Lage haben A, B und C_0 zueinander?
   b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC_k für jedes $k \in R \setminus \{0\}$ gleichschenklig ist.
   c) Bestimmen Sie k so, dass das Dreieck ABC_k rechtwinklig ist.
   d) Bestimmen Sie zum Dreieck ABC_1 einen weiteren Punkt S so, dass die Pyramide ABC_1S das Volumen V = 18 besitzt.

Q11 * Mathematik * Vermischte Aufgaben zur Vektorrechnung * Lösungen

1. a) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{BA}\right| = 3\cdot\sqrt{14}$; $\cos\beta = \dfrac{-9+45+6}{3\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}} \Rightarrow \beta = 50{,}768...^{\circ}$

   b) $A_\Delta = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BA} \text{ x } \overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 21 \\ -21 \\ 42 \end{pmatrix}\right| = \dfrac{21\cdot\sqrt{6}}{2}$

   c) $\overrightarrow{BF} = \dfrac{\overrightarrow{BC}\circ\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BA}}\cdot\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} = \vec{B} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ also $F(3/2/2)$

   d) $\overrightarrow{C^*} = \vec{F} + \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ also $C^*(-1/0/1)$

   e) $\overrightarrow{BA} \text{ x } \overrightarrow{BC} = 21\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene E und $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{6}$.

   Wähle z.B. $\vec{P} = \vec{B} + 3\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \vec{B} + 3\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$, also $P(7/-4/10)$.

2. a) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB} = -4+32-28 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

   b) $\overrightarrow{M_a} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$ und $\overrightarrow{M_b} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\vec{A}+\vec{C}\right) \Rightarrow M_a = M_a(5{,}5/2/6)$ und $M_b = M_b(3/4/0{,}5)$

   c) $\overrightarrow{AS} = \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix} 2{,}25 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ (Strahlensatz) $\Rightarrow S = S(3{,}25/2/1{,}5)$

3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

   a) $A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\text{x}\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{144+64+36} = \sqrt{61}$

   b) $V_{Pyr} = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AD}\circ(\overrightarrow{AB}\text{x}\overrightarrow{AC})\right| = \dfrac{1}{6}\cdot\left|-48+18\right| = 5$

   c) $V_{Pyr} = \dfrac{1}{3}\cdot A_{\Delta ABC}\cdot h \Rightarrow d = h = \dfrac{3\cdot V_{Pyr}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{15}{\sqrt{61}} = \dfrac{15\cdot\sqrt{61}}{61} \approx 1{,}92$

   d) Pythagoras: $\rho^2 + d^2 = r^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{5^2 - \dfrac{225}{61}} = \dfrac{10\cdot\sqrt{793}}{61} \approx 4{,}62$

4. a) $\overrightarrow{AC_o} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{AC_o} \;\Rightarrow\;$ C_o ist der Mittelpunkt der Strecke [AB].

b) $\overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} 2+2k \\ 2-k \\ -1+2k \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} -2+2k \\ -2-k \\ 1+2k \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{AC_k}\right| = 3 \cdot \sqrt{k^2+1} = \left|\overrightarrow{BC_k}\right|$

c) $\overrightarrow{AC_k} \circ \overrightarrow{BC_k} = \;\ldots\; = 9k^2 - 9$; $\overrightarrow{AC_k} \circ \overrightarrow{BC_k} = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$

Für $k = \pm 1$ ist also das Dreieck ABC_k rechtwinklig.

d) $\overrightarrow{AC_1} \times \overrightarrow{BC_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, d.h. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Grundfläche.

wegen $18 = V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot h$ und $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{18} = 9 \;\Rightarrow$

$h = \frac{3 \cdot V}{A_{ABC}} = \frac{3 \cdot 18}{9} = 6$;

wähle z.B. $\vec{S} = \vec{A} + h \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ also $S(3/-2/0)$.