Q11 * Mathematik * Das Skalarprodukt zweier Vektoren

1. Berechnen Sie im Dreieck ABC die Seitenlängen und die Innenwinkel.
   A(2 / – 3 / 4), B(– 1 / 1 / 4) und C(4 / – 1 / 3).

2. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

   b) Bestimmen Sie je drei Vektoren die auf $\vec{a}$ bzw. auf $\vec{b}$ senkrecht stehen.

   c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

3. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie möglichst einfach einen Vektor $\vec{c}$, der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

4. Das Dreieck ABC ist durch A(–1/ 4 / 3), B(5 / – 5 / 6) und C(7 / 0 / 3) gegeben.

   a) Berechnen Sie den Fußpunkt F des Lotes von C auf die Seite [AB].

   b) Berechnen Sie die Länge der Höhe h_c und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

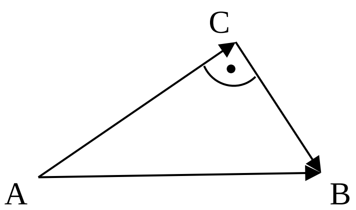
5. Gegeben sind die Punkte A(1 / – 2 / 3), B(5 / 2 / 1) und C_k(5 + 2k / – 1 – k / 4 + 2k) mit $k \in R$.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC_k für $k \neq -1$ gleichschenklig ist.

   b) Für welchen Wert von k ist das Dreieck gleichseitig?

   c) Für welchen Wert von k ist das Dreieck rechtwinklig?

6. Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts den Satz von Pythagoras.



7. Gegeben sind die Punkte A(1 / – 2 / 3) und B(5 / 2 / 1).

   Finden Sie einen Punkt C, so dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist. Wie viele Punkte C mit der gesuchten Eigenschaft gibt es und wie liegen diese Punkte?

Q11 * Mathematik * Das Skalarprodukt zweier Vektoren * Lösungen

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \;;\; \overline{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \;;\; \overline{BC} = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{-6 + 8 + 0}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 82{,}3^\circ \;;$$

$$\cos ß = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} = \frac{15 + 8 - 0}{5 \cdot \sqrt{30}} = \frac{23}{5 \cdot \sqrt{30}} \;\Rightarrow\; ß \approx 32{,}9^\circ \;;\; \gamma \approx 180^\circ - 32{,}9^\circ - 82{,}3^\circ = 64{,}8^\circ$$

2. a) $\cos\varphi = \dfrac{-12 - 4 + 3}{\sqrt{36+4+9} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \dfrac{-13}{7 \cdot 3} \;\Rightarrow\; \varphi \approx 128{,}2^\circ$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$: z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$ und z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Für $\vec{c}$ muss gelten $\vec{a} \circ \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{c} = 0 \;\Rightarrow$

(1) $6c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0$ und (2) $-2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$

Eleminiere z.B. c_2 durch $(1) + (2) \Rightarrow 4c_1 + 4c_3 = 0$ und wähle nun frei $c_1 = 1 \Rightarrow c_3 = -1$

und in (2) eingesetzt folgt $-2 + 2c_2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 1{,}5$ also $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ c_2 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $0 = \vec{c} \circ \vec{b} = 10 + 2c_2 + 6 \;\Rightarrow\; c_2 = -8$ also $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. Das Dreieck ABC ist durch A(–1/ 4 / 3), B(5 / – 5 / 6) und C(7 / 0 / 3) gegeben.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{48 + 36 + 0}{(3 \cdot \sqrt{4+9+1})^2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$\frac{84}{9 \cdot 14} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -1 + 4 \\ 4 - 6 \\ 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$ also $F(3 / -2 / 5)$

b) $h_c = \left|\overrightarrow{CF}\right| = \sqrt{(3-7)^2 + (-2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4+4} = 2 \cdot \sqrt{6}$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{4+9+1} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} = 6 \cdot \sqrt{21}$$

5\. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix}$;

$\overline{AC_k} = \sqrt{16+16k+4k^2+1-2k+k^2+1+4k+4k^2} = \sqrt{18+18k+9k^2}$

$\overline{BC_k} = \sqrt{4k^2+9+6k+k^2+9+12k+4k^2} = \sqrt{18+18k+9k^2}$ also $\overline{AC_k} = \overline{BC_k}$

(Für $k=-1$ gilt $C_1(3/0/2)$ und C_1 ist der Mittelpunkt der Strecke [AB].)

b) Das Dreieck ABC ist gleichseitig, falls gilt

$\overline{AC_k} = \overline{AB} \Leftrightarrow \sqrt{16+16+4} = \sqrt{18+18k+9k^2} \Leftrightarrow 36 = 18+18k+9k^2 \Leftrightarrow$

$0 = -18+18k+9k^2 \Leftrightarrow k^2+2k-2=0 \Leftrightarrow k_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 2}) = -1 \pm \sqrt{3}$

c) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, falls gilt $\overrightarrow{AC_k} \circ \overrightarrow{BC_k} = 0 \Leftrightarrow$

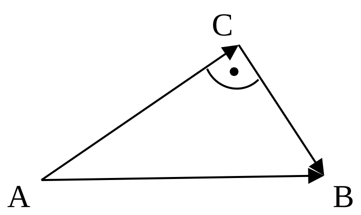
$\begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8k+4k^2-3+2k+k^2+3+8k+4k^2 = 0 \Leftrightarrow$

$9k^2+18k = 0 \Leftrightarrow 9k\cdot(k+2) = 0 \Leftrightarrow k_3 = 0$; $k_4 = -2$

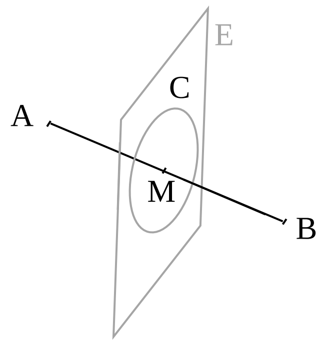
6\. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow$

$c^2 = \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC}\right)^2 + 2\cdot\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{CB} + \left(\overrightarrow{CB}\right)^2 =$

$\left(\overrightarrow{AC}\right)^2 + 0 + \left(\overrightarrow{CB}\right)^2 = b^2 + a^2$



7\. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\cdot\sqrt{4+4+1} = 6$



Der Mittelpunkt M der Strecke [AB] lautet $M(3/0/2)$.

Eine Senkrechte zu $\overrightarrow{AB} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist z.B. $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jeder Punkt C mit $\overrightarrow{MC} = r\cdot\vec{s} = r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(r \in R \setminus \{0\})$ liefert ein gleichschenkliges Dreieck.

Diese Punkte liegen in einer Ebene E, die M enthält und senkrecht zu AB liegt.

Für r = 1 ist dieses Dreieck sogar rechtwinklig: $\vec{C} = \vec{M} + 1\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ also $C(5/-1/4)$, denn

dann gilt $\overline{AM} = \overline{MC}$.