Q11 * Mathematik * Standardaufgaben zur analytischen Geometrie

1. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(5/2/5), C(1/4/7) und P(-1/12/1).

   a) Bestimmen Sie die Seitenlängen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.

   b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ im Dreieck ABC.

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

   d) Bestimmen Sie die Seitenmitten M_c und M_b der Seiten [AB] bzw. [AC].

   e) Bestimme den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden auf zwei unterschiedliche Arten.

   f) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von C auf die Seite [AB].

   g) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auf zwei Arten.

   h) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden AB auf zwei Arten.

   i) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide ABCP.

   j) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E, die durch das Dreieck ABC festgelegt wird.

   k) Für Experten:
   Bestimmen Sie den Mittelpunkt N des Umkreises zum Dreieck ABC!

2. Die Gerade g geht durch die Punkte A(1/2/3) und B(4/-7/9).
   Der Punkt P(10/3/7) soll an der Geraden AB gespiegelt werden.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts P^*.

3. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(3/3/1) und C(5/1/2).

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ist.
   Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

   b) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann.
   Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die Pyramide ABCDS gerade ist (d.h. S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats ABCD) und diese Pyramide das Volumen 27 besitzt.

Q11 * Mathematik * Standardaufgaben zur analytischen Geometrie * Lösungen

1. a) $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+0+4} = 2\cdot\sqrt{5}$ und $\overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0+4+16} = 2\cdot\sqrt{5}$

   b) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{8}{2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \alpha = 66{,}42...^{\circ} \approx 66{,}4^{\circ}$

   c) $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \vec{A} + \vec{C} - \vec{B} \Rightarrow D(-3/4/5)$

   d) $\overrightarrow{M_c} = \vec{A} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) \Rightarrow M_c(3/2/4)$

   $\overrightarrow{M_b} = \vec{A} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{C}) \Rightarrow M_b(1/3/5)$

   e) S ist der Schwerpunkt, also $\vec{S} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) \Rightarrow S(\frac{7}{3}/\frac{8}{3}/5)$ oder

   $\vec{S} = \vec{B} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BM_b} \Rightarrow S(\frac{7}{3}/\frac{8}{3}/5)$

   f) Projektion: $\vec{F} - \vec{A} = \overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AB}}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{8}{20}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow F(2{,}6/2/3{,}8)$

   g) $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CF}\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{1{,}6^2+2^2+3{,}2^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{105} = 2\sqrt{21}$

   $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-4\\-16\\8\end{pmatrix}\right| = 2\cdot\sqrt{1+16+4} = 2\cdot\sqrt{21}$

   h) $h = \left|\overrightarrow{CF}\right| = \sqrt{1{,}6^2+2^2+3{,}2^2} = \sqrt{\frac{84}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{105}$

   $2\cdot\sqrt{21} = F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CF} \Rightarrow \overline{CF} = \dfrac{4\cdot\sqrt{21}}{\overline{AB}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{105}}{5}$

   i) $V_{Pyramide} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AP}\circ(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\10\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\-16\\8\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|8-160-16\right| = \frac{168}{6} = 28$

   j) $28 = V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot F_{\Delta ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{21}\cdot h \Rightarrow h = \dfrac{28\cdot 3}{2\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{42\cdot\sqrt{21}}{21} = 2\cdot\sqrt{21}$

   Und diese Höhe h stimmt mit dem Abstand des Punktes P von der Ebene E überein.

   k) $N = N(\frac{17}{7}/\frac{19}{7}/\frac{36}{7})$

2. Fußpunkt F des Lots von P auf AB.

   $\vec{F} - \vec{A} = \overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AB}}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow F(2/-1/5)$

   $\overrightarrow{P^*} - \vec{F} = \overrightarrow{FP^*} = \overrightarrow{PF} \Rightarrow \overrightarrow{P^*} = \vec{F} + \overrightarrow{PF} \Rightarrow P^*(-6/-5/3)$

3. a) $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \beta = 90^o$ und $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3 \Rightarrow$

ΔABC ist rechtwinklig mit Flächeninhalt $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$

b) $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow D(3/0/4)$

c) Senkrechte auf die Ebene: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

und $\left|\vec{n}\right| = 9$ und $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{C}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ und

$27 = V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot h \Rightarrow h = 9$ und $\vec{S} = \vec{M} \pm \vec{n} \Rightarrow \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7{,}5 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}$