Q11 * Mathematik * „Schöne“ Funktionen für eine Kurvendiskussion

1. Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich und alle Nullstellen. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs. Berechnen Sie alle Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte und skizzieren Sie dann den Graphen.

a) $f(x) = \dfrac{2x+8}{\sqrt{x^2+4}}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2+6x}{x^2+3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+8}{4x-8}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{8}(3x^4-4x^3-12x^2)$

2. Die angegebene Funktion soll an der Stelle $x_1 = 2$ einen Tiefpunkt besitzen. Untersuchen Sie, ob es dafür einen passenden Wert für den Parameter k gibt. Diskutieren Sie dann den Funktion f und skizzieren Sie den Graphen.

$$f(x) = \frac{kx-3}{x^2+1}$$

3. Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Graph von f bei $x_1 = -1$ eine waagrechte Tangente besitzt. Liegt bei x_1 dann ein Tief- oder ein Hochpunkt des Graphen.

$$f(x) = \frac{2x+k}{\sqrt{x^2+1}}$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 2$ gilt.

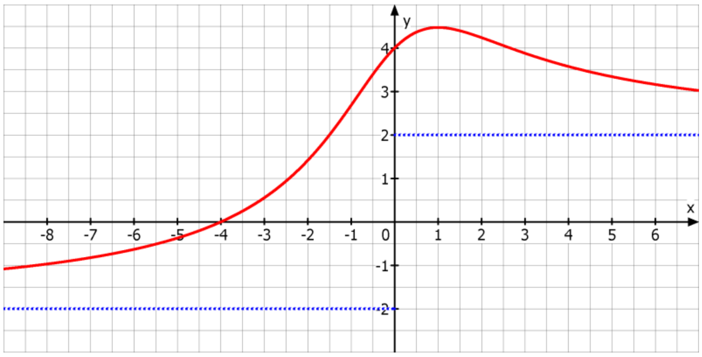
Skizzieren Sie nun den Graphen von f.

Q11 * Mathematik * „Schöne“ Funktionen für eine Kurvendiskussion

1.

$$f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x^2+4}} \quad ; \quad f'(x) = \frac{8\cdot(1-x)}{(x^2+4)^{3/2}}$$

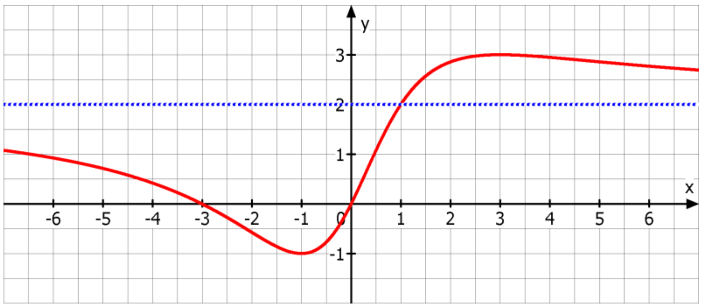
$\text{HOP}(1/2\sqrt{5})$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 2$



$$f(x) = \frac{2x^2+6x}{x^2+3} \quad ; \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{6\cdot(-x^2+2x+3)}{(x^2+3)^2}$$

$\text{TIP}(-1/-1)$; $\text{HOP}(3/3)$

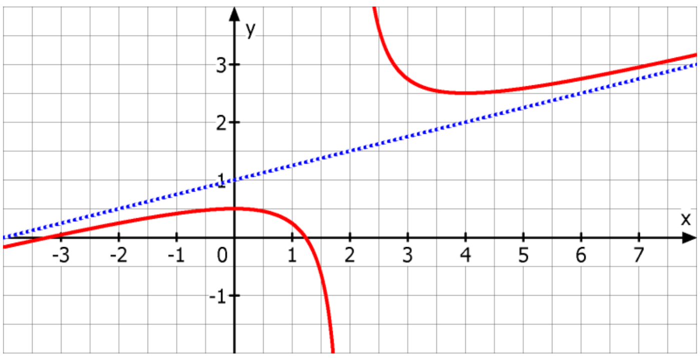


$$f(x) = \frac{x^2+2x+8}{4x-8}$$

Schräg liegende Asymptote
$y = 0{,}25x+1$ für $x \to \pm\infty$

$$f'(x) = \frac{4x\cdot(x-4)}{(4x-8)^2}$$

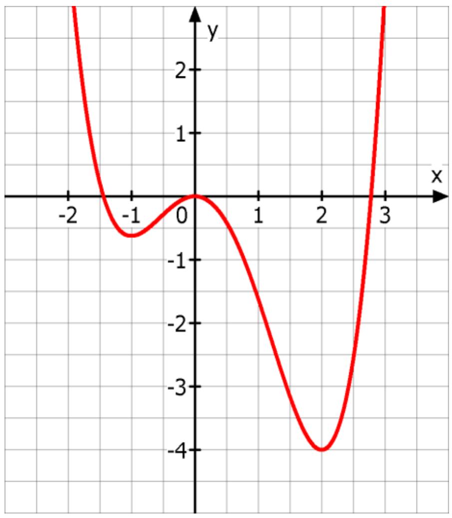
$\text{HOP}(0/0{,}5)$; $\text{TIP}(4/2{,}5)$



$$f(x) = \frac{1}{8}(3x^4-4x^3-12x^2) \quad ; \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x(x+1)\cdot(x-2)$$

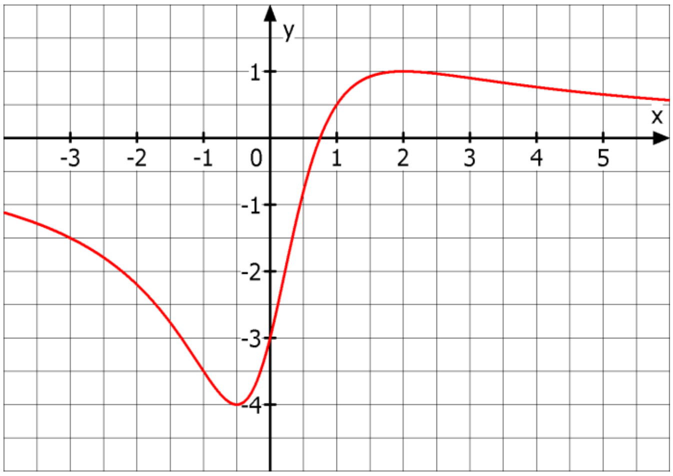
$\text{HOP}(-1/-\frac{5}{8})$; $\text{TIP}(2/-4)$



2. Es muss $k = 4$ gelten.

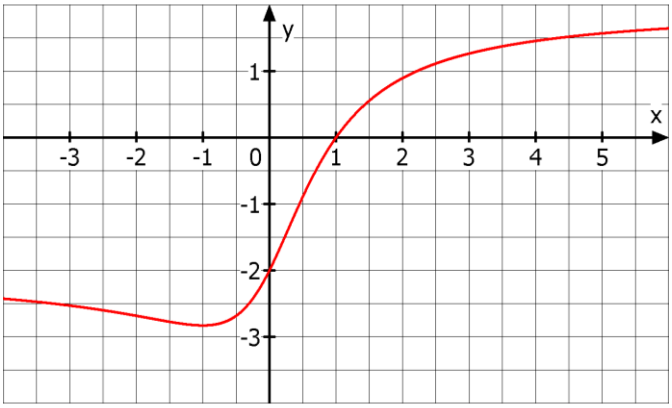
$$f(x) = \frac{4x-3}{x^2+1} \quad \text{und}$$

$$f'(x) = \frac{-4\cdot(x-2)\cdot(x+0,5)}{(x^2+1)^2}$$



3. Es muss $k = -2$ gelten.

$$f'(x) = \frac{2x+2}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm\sqrt{(2x-2)^2}}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \pm\sqrt{\frac{(2x-2)^2}{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \pm\sqrt{\frac{4x^2-8x+4}{x^2+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \pm\sqrt{\frac{x^2\cdot(4x-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2\cdot(1+\frac{1}{x^2})}} = \text{"}\pm\sqrt{\frac{4\mp0+0}{1+0}}\text{"} = \pm\sqrt{4} = \pm2$$