# Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Skalar- und Kreuzprodukt

1. Gegeben sind die Punkte A( 1 / – 2 / 3 ), B( 2/ 2 / 4 ), C(– 1 / 0 / 0 ) und S( 2 / 3 / 9 ) .

   a) Zeigen Sie, dass A, B und C ein Dreieck ABC bilden
   und berechnen Sie dessen Flächeninhalt $A_{\Delta ABC}$.

   b) Zeigen Sie, dass S nicht in der von A, B und C festgelegten Ebene E liegt
   und berechnen Sie das Volumen $V_{ABCS}$ der Pyramide ABCS.

   c) Bestimmen Sie den Abstand, den S von der Ebene E hat.

2. Gegeben sind die Punkte A( 1 / 5 / –3 ), B( 5 / –1 / 5 ) und P( 3 / 5,5 / 0 ) .

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F des Lots von P auf die Gerade AB.
   Welchen Abstand hat also der Punkt P von der Geraden AB?

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABP auf zwei unterschiedliche Arten.

3. Gegeben sind die Punkte A( 1 / 2 / 1 ), B( 9 / –2 / 9 ) und C( 10 / 2 / 5,5 ).

   a) Berechne den Fußpunkt F des Lotes von C auf die Gerade AB
   und den Mittelpunkt M der Strecke [BC].

   b) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes S der Höhe $h_c$ und der
   Seitenhalbierenden $s_a$ im Dreieck ABC.

4. Gegeben sind die Punkte A( 7 / 9 / –7 ), B( 1 / 2 / –1 ) und C( 3 / 8 / 8 ).

   a) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann,
   so dass die Koordinaten von D ganzzahlig sind.

   b) Zeigen Sie, dass man das Quadrat ABCD zu einem Würfel ABCDEFGH ergänzen
   kann, so dass die Koordinaten des Punktes E ebenfalls ganzzahlig sind.
   (Wie viele Möglichkeiten gibt es für E?)

   c) Begründen Sie, dass die Kugel mit Mittelpunkt G und Radius r = 14 die durch
   das Quadrat ABCD bestimmte Ebene in einem Kreis schneidet und berechnen Sie
   den Radius dieses Kreises.

**Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Skalar- und Kreuzprodukt * Lösungen**

1. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\neq r\cdot\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ ABC bilden ein Dreieck.

$$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-14\\1\\10\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{297} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{33}$$

b) $\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AS}\circ(\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC}) = \begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-14\\1\\10\end{pmatrix} = 51\neq 0 \Rightarrow$ S liegt nicht in der Ebene E und

$$V_{Pyramide}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AS}\circ(\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{6}\cdot 51 = 8{,}5$$

c) $V_{Pyramide}=\frac{1}{3}\cdot A_{\Delta ABC}\cdot h = 8{,}5 \Rightarrow h = \dfrac{8{,}5\cdot 3}{1{,}5\cdot\sqrt{33}} = \dfrac{17\cdot\sqrt{33}}{33}$ und h ist der gesuchte Abstand.

d) $\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-14\\1\\10\end{pmatrix} = \vec{n}$ ist Normalenvektor der Ebene E mit der Länge $\left|\vec{n}\right| = 3\cdot\sqrt{33}$.

$$\vec{S}^{*} = \vec{S} \pm \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}\cdot 2\cdot h = \vec{S} \pm \frac{\vec{n}}{3\cdot\sqrt{33}}\cdot 2\cdot\frac{17\cdot\sqrt{33}}{33}$$

2. a) Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert $\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}2\\0{,}5\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AP}\circ\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AB}}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{8-3+24}{116}\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1{,}5\\2\end{pmatrix}$

$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1{,}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3{,}5\\-1\end{pmatrix}$, also $F(2/3{,}5/-1)$ und $\left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6}$ ist der Abstand des Punktes P von der Geraden AB.

b) $A_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\,x\,\overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-22\\4\\14\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{696} = \sqrt{174}$ oder

$$A_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FP}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{116}\cdot\sqrt{6} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{696} = \sqrt{174}$$

3. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8\\-4\\8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}9\\0\\4,5\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AF}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AB}}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{108}{144}\cdot\begin{pmatrix}8\\-4\\8\end{pmatrix}=\dfrac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}8\\-4\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$

$\vec{F}=\vec{A}+\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\\7\end{pmatrix}$ , also $F(7/-1/7)$ und $\vec{M}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\begin{pmatrix}9,5\\0\\7,25\end{pmatrix}$

b) $\vec{S}=\vec{A}+r\cdot\overrightarrow{AM}$ und $\vec{S}=\vec{C}+t\cdot\overrightarrow{CF}$ mit geeigneten $r,t\in R$

$\vec{S}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}8,5\\-2\\6,25\end{pmatrix}$ und $\vec{S}=\begin{pmatrix}10\\2\\5,5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\1,5\end{pmatrix}$ also $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}8,5\\-2\\6,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\2\\5,5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\1,5\end{pmatrix}$

Das zugehörige Gleichungssystem (3 Gleichungen mit den zwei Unbekannten r und t) wird durch $r=\dfrac{6}{7}$ und $t=\dfrac{4}{7}$ gelöst, d.h.

$\vec{S}=\begin{pmatrix}10\\2\\5,5\end{pmatrix}+\dfrac{4}{7}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\1,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58/7\\2/7\\89/7\end{pmatrix}$ also $S(\dfrac{58}{7}/\dfrac{2}{7}/\dfrac{89}{7})$

4. a) $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}$ ; $\left|\overrightarrow{BA}\right|=11=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ und $\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}=12+42-54=0$ also $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$

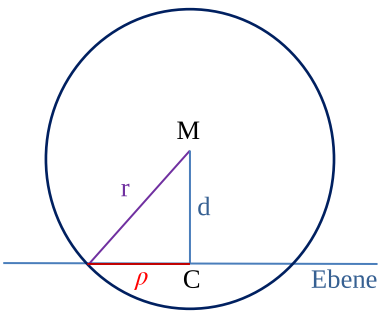
$\vec{D}=\vec{A}+\overrightarrow{BC}\;\Rightarrow\; D(9/15/2)$

b) Gesucht ist $\vec{n}$ mit $\vec{n}\perp\overrightarrow{BA}$ und $\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}$ und $\left|\vec{n}\right|=11$, dann gilt $\vec{E}_{1/2}=\vec{A}\pm\vec{n}$.

$\vec{m}=\overrightarrow{BA}\,x\,\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}6\\7\\-6\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}99\\-66\\22\end{pmatrix}=11\cdot\begin{pmatrix}9\\-6\\2\end{pmatrix}$ , also $\vec{n}=\begin{pmatrix}9\\-6\\2\end{pmatrix}$, denn $\left|\begin{pmatrix}9\\-6\\2\end{pmatrix}\right|=11$

$\vec{E}_{1/2}=\vec{A}\pm\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\9\\-7\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}9\\-6\\2\end{pmatrix}$ also $E_1(16/3/-5)$ und $E_2(-2/15/-9)$

c) G hat von der Grundebene den Abstand $d = 11$. Der Mittelpunkt des Schnitt-Kreises ist damit der Punkt C und der Radius $\rho$ des Schnitt-Kreises lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen.




$r^2=d^2+\rho^2 \;\Leftrightarrow\; 14^2=11^2+\rho^2 \;\Leftrightarrow$

$\rho=\sqrt{75}=5\cdot\sqrt{3}$