

Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Differentialquotienten

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{4}{2+3x}$.

a) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $P(1 / 0,8)$.

b) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen in einem beliebigen Punkt $P(x_0 / f(x_0))$.

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

Bestimmen Sie die Steigung in einem beliebigen Punkt $P(x_0 / f(x_0))$.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = a \cdot x^5$ (mit $a \in \mathbb{R}$).

Bestimmen Sie die Steigung in einem beliebigen Punkt $P(x_0 / f(x_0))$.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2x}{1+x^3}$.

Bestimmen Sie die Steigung des Graphen in einem beliebigen Punkt $P(x_0 / f(x_0))$.



Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Differentialquotienten * Lösungen

1. a) $f(x) = \frac{4}{2+3x}$ Steigung m in (P(1/0,8))

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{4}{2+3x} - 0,8}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 0,8 \cdot (2+3x)}{2+3x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 1,6 - 2,4x}{(2+3x)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2,4 - 2,4x}{(2+3x)(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2,4 \cdot (x-1)}{(2+3x)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2,4}{2+3x} = \frac{-2,4}{5} = -0,48$$

b) $m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4}{2+3x} - \frac{4}{2+3x_0}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4 \cdot (2+3x_0) - 4 \cdot (2+3x)}{(2+3x) \cdot (2+3x_0)}}{x-x_0} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4 \cdot (2+3x_0) - 4 \cdot (2+3x)}{(2+3x) \cdot (2+3x_0) \cdot (x-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{12x_0 - 12x}{(2+3x) \cdot (2+3x_0) \cdot (x-x_0)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-12(x-x_0)}{(2+3x) \cdot (2+3x_0) \cdot (x-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-12}{(2+3x) \cdot (2+3x_0)} = \frac{-12}{(2+3x_0)^2}$$

2. $m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{3}{x_0^2}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{3x_0^2 - 3x^2}{x^2 \cdot x_0^2}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3 \cdot (x_0^2 - x^2)}{x^2 \cdot x_0^2 \cdot (x-x_0)} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3 \cdot (x_0 - x) \cdot (x_0 + x)}{x^2 \cdot x_0^2 \cdot (x-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-3 \cdot (x_0 + x)}{x^2 \cdot x_0^2} = \frac{-3 \cdot (x_0 + x_0)}{x_0^2 \cdot x_0^2} = \frac{-6x_0}{x_0^4} = \frac{-6}{x_0^3}$$

3. $m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax^5 - ax_0^5}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x^5 - x_0^5)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x-x_0) \cdot (x^4 + x^3x_0 + x^2x_0^2 + xx_0^3 + x_0^4)}{x-x_0} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a \cdot (x^4 + x^3x_0 + x^2x_0^2 + xx_0^3 + x_0^4) = a \cdot (x_0^4 + x_0^3x_0 + x_0^2x_0^2 + x_0x_0^3 + x_0^4) = 5ax_0^4$$

4. $m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2x}{1+x^3} - \frac{2x_0}{1+x_0^3}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2x \cdot (1+x_0^3) - 2x_0 \cdot (1+x^3)}{(1+x^3) \cdot (1+x_0^3)}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x + 2xx_0^3 - 2x_0 - 2x_0x^3}{(1+x^3) \cdot (1+x_0^3) \cdot (x-x_0)} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(-2x_0) \cdot x^3 + (2+2x_0^3) \cdot x - 2x_0}{(1+x^3) \cdot (1+x_0^3) \cdot (x-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(-2x_0x^2 - 2x_0^3 + 2) \cdot (x-x_0)}{(1+x^3) \cdot (1+x_0^3) \cdot (x-x_0)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(-2x_0x^2 - 2x_0^3 + 2)}{(1+x^3) \cdot (1+x_0^3)} = \frac{(-2x_0x_0^2 - 2x_0^3 + 2)}{(1+x_0^3) \cdot (1+x_0^3)} = \frac{-4x_0^3 + 2}{(1+x_0^3)^2}$$

Polynomdivision:

$$\left((-2x_0) \cdot x^3 + (2+2x_0^3) \cdot x - 2x_0 \right) : (x-x_0) = -2x_0x^2 - 2x_0^2x + 2$$

$$\begin{array}{r} -(-2x_0x^3 + 2x_0^2x^2) \\ \hline -2x_0^2x^2 + (2+2x_0^3) \cdot x - 2x_0 \\ -(-2x_0^2x^2 + 2x_0^3x) \\ \hline -2x_0^3x + (2+2x_0^3) \cdot x - 2x_0 = 2x - 2x_0 \\ \hline 2x - 2x_0 \\ \hline -(2x - 2x_0) \end{array}$$

