

## Q11 \* Mathematik \* Aufgaben zum natürlichen Logarithmus

1. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen den Definitionsbereich  $D_f$  und ermitteln Sie alle Nullstellen.

Berechnen Sie dann die Ableitung  $f'(x)$  und geben ermitteln Sie alle Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen von  $f$ .

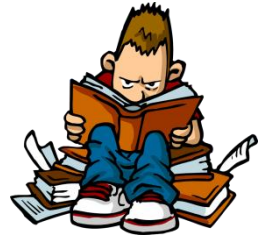
a)  $f(x) = \ln(2x + 3)$

b)  $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

c)  $f(x) = \ln(2 + 2x - x^2)$

d)  $f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x^2+1}\right)$

e)  $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

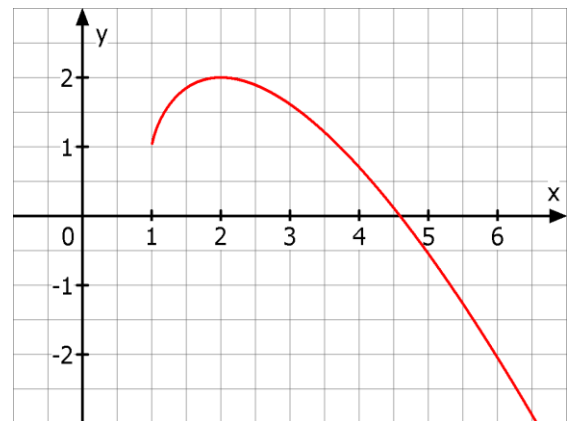


2. Das Bild zeigt den Graphen der

Funktion  $f$  mit

$$f(x) = x - (x-1) \cdot \ln(x-1).$$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Ableitung  $f'(x)$ .
- b) Zeigen Sie, dass  $G_f$  nur einen Extrempunkt, nämlich den Hochpunkt  $(2/2)$  besitzt.
- c) Begründen Sie, dass  $f$  nur eine Nullstelle  $x_1$  besitzt, und dass  $4 < x_1 < 5$  gilt.

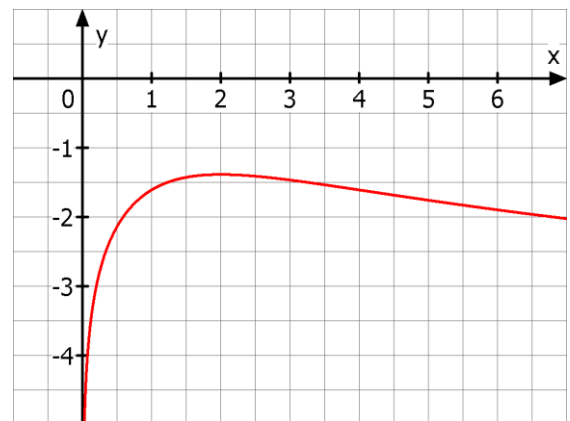


3. Das Bild zeigt den Graphen der

Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+4}\right).$$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Ableitung  $f'(x)$ .
- b) Zeigen Sie, dass  $G_f$  nur einen Extrempunkt, nämlich den Hochpunkt  $(2/f(2))$  besitzt.
- c) Begründen Sie, dass  $f$  keine Nullstelle besitzt.

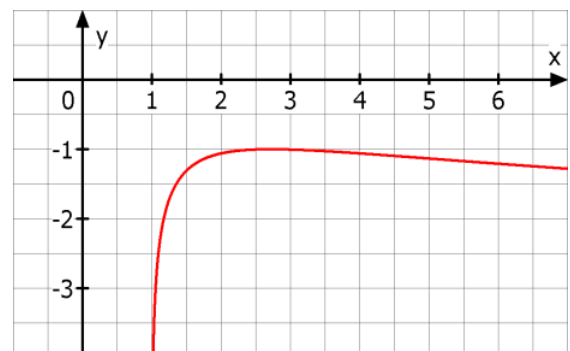


4. Das Bild zeigt den Graphen der

Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich von  $f$  und zeigen Sie, dass der Graph von  $f$  genau einen Hochpunkt besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Hochpunktes.



## Q11 \* Mathematik \* Aufgaben zum natürlichen Logarithmus \* Lösungen

1. a)  $f(x) = \ln(2x+3)$ ;  $D_f = ]-1,5; \infty[$ ; NSt.:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$

$$f'(x) = \frac{2}{2x+3} \text{ und } f'(x) > 0 \text{ f\"ur alle } x \in D_f, \text{ also keine Hoch- bzw. Tiefpunkte}$$

b)  $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ ;  $D_f = \mathbb{R} \setminus [0; 2]$ ; NSt.:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x} \text{ und } f'(x) > 0 \text{ f\"ur } x \in ]2; \infty[ \text{ und } f'(x) < 0 \text{ f\"ur } x \in ]-\infty; 0[,$$

also keine Hoch- bzw. Tiefpunkte

c)  $f(x) = \ln(2+2x-x^2)$ ; ;  $D_f = ]1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}[$ ; NSt.:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x-2} \text{ und } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; \text{ HOP}(1; \ln 3) \approx (1; 1,1)$$

d)  $f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x^2+1}\right)$ ;  $D_f = ]1,5; \infty[$ ; NSt.:  $f(x) = 0$  hat keine Lösung, also keine NSt.

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{2x-3} \cdot \frac{2 \cdot (x^2+1) - (2x-3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (-x^2+3x+1)}{(2x-3) \cdot (x^2+1)}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

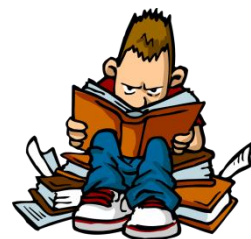
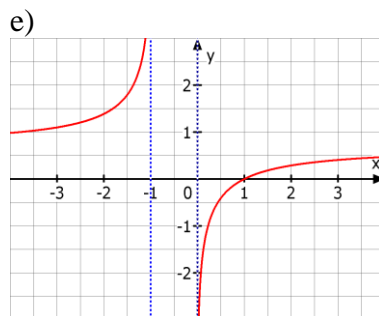
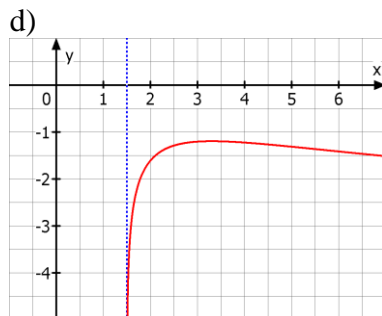
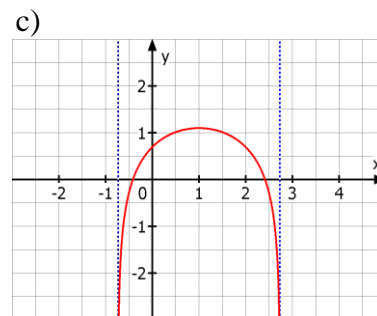
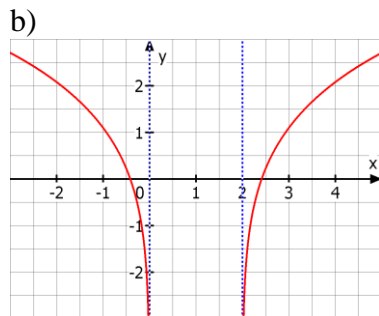
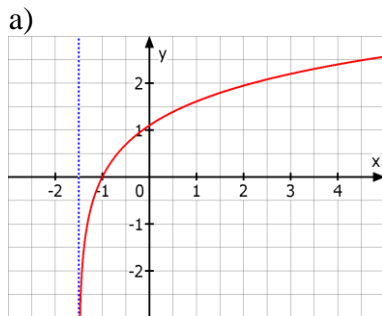
$$\text{HOP}(x_1; f(x_1)) \approx (3,3; -1,2)$$

e)  $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ ;  $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1; 0]$ ; NSt.:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot (x+1)} \text{ und } f'(x) > 0 \text{ f\"ur } x \in ]-\infty; -1[ \text{ und } f'(x) > 0 \text{ f\"ur } x \in ]0; \infty[,$$

also keine Hoch- bzw. Tiefpunkte

Bilder zu den Graphen:



2.  $f(x) = x - (x-1) \cdot \ln(x-1)$ .

a)  $D_f = ]1; \infty[$  und  $f'(x) = -\ln(x-1)$

b)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$f'(x) > 0$  für  $1 < x < 2$  und

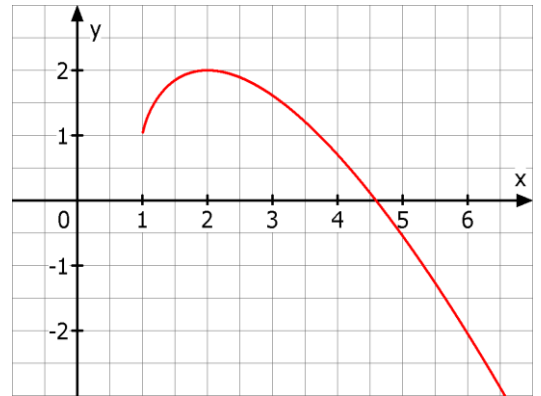
$f'(x) < 0$  für  $2 < x < \infty \Rightarrow \text{HOP}(2;2)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [x - (x-1) \cdot \ln(x-1)] = 1 - 0 = 1$

also gibt es keine Nullstelle im Intervall  $]1; 2]$ .

$f$  ist streng monoton fallend im Intervall  $[2; \infty[$

und  $f(4) \approx 0,70 > 0$  und  $f(5) \approx -0,55$ , also gibt es nur eine Nullstelle im Intervall  $]4; 5[$ .



3.  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+4}\right)$ .

a)  $D_f = ]0; \infty[$  und  $f'(x) = \frac{4-x^2}{x \cdot (x^2+4)}$

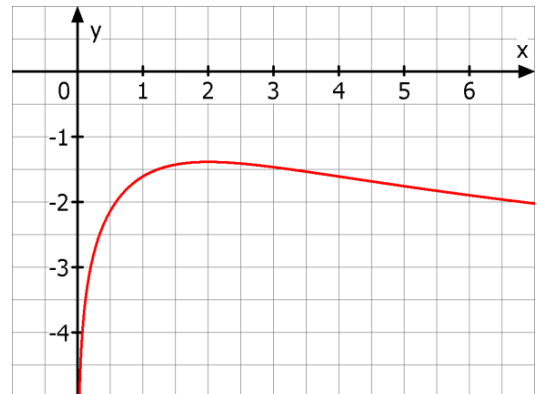
b)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$f'(x) > 0$  für  $x \in ]0; 2[$  und

$f'(x) < 0$  für  $x \in ]2; \infty[ \Rightarrow$

$\text{HOP}(2; f(2)) \approx (2; -1,4)$

c) Da der Hochpunkt unterhalb der x-Achse liegt [ $f(2) \approx -1,4 < 0$ ], besitzt  $f$  keine Nullstelle.



4.  $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ;

$D_f: \frac{\ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$  also  $D_f = ]1; \infty[$

$$f'(x) = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x \cdot \ln x}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x_1 = e \approx 2,718$

$f'(x) > 0$  für  $x \in ]1; e[$  und

$f'(x) < 0$  für  $x \in ]e; \infty[ \Rightarrow$

$\text{HOP}(e; f(e)) = (e; -1)$ , denn  $f(e) = \ln \frac{\ln e}{e} = \ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$

