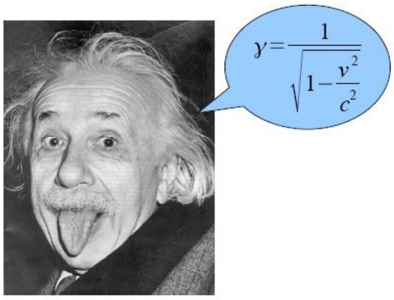
Physik * Q11 * Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie



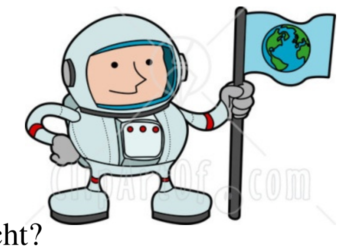
1. Ein Elektron hat die Ruhemasse $m_o = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$.
   a) Berechnen Sie die Ruheenergie des Elektrons in der Einheit eV.
   b) Welche Spannung müssen Elektronen durchlaufen, damit sich ihre Masse verdoppelt?
   c) Welche Geschwindigkeit haben Elektronen, deren Masse gerade der doppelten Ruhemasse entspricht?

2. a) Elektronen haben eine Spannung von 900 kV durchlaufen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit dieser Elektronen und ihre Masse in Vielfachen der Ruhemasse.
   b) Elektronen sollen eine Geschwindigkeit von 0,99c erreichen.
   Welche Spannung müssen sie dazu durchlaufen und welche Masse haben sie dann?
   Wie groß ist die kinetische Energie dieser Elektronen?
   c) Bei geringen Geschwindigkeiten ist die relativistische Massenzunahme äußerst gering.
   Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die für eine Massenzunahme des Elektrons um 2,0% erforderlich ist. Welche Beschleunigungsspannung wird dafür benötigt?

3. Die Sonne setzt pro Sekunde eine Energie von $3{,}8 \cdot 10^{26}$ Joule frei.
   Welche Masse verliert die Sonne pro Sekunde und pro Jahr?
   Wie lange dauert es, bis die Sonne so 1,0% ihrer Masse „verloren“ hat? ($M_{Sonne} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$kg)

4. Elektronen der kinetischen Energie 1,0 MeV treten senkrecht in ein Magnetfeld der Flussdichte 0,45 T ein. Wie groß ist der Bahnradius der Kreisbahn?

5. Teilchen mit der Ladung q = -e durchlaufen zunächst ein Wienfilter mit $E = 7{,}00 \cdot 10^5$ V/m und B = 4,00mT und treten dann in einen Raumbereich ein, in dem nur noch dieses Magnetfeld herrscht. Hier beschreiben die Teilchen dann ein Kreisbahn mit dem Radius 30,6cm.
   Berechnen Sie die spezifische Ladung q/m_o dieser Teilchen.
   Um welche Teilchen könnte es sich handeln?

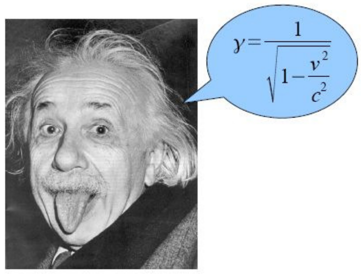


6. Das Raumschiff von Astronaut Pirx fliegt mit 75 % der Lichtgeschwindigkeit zu einem Stern, der 5 Lichtjahre von der Erde entfernt ist.
   a) Wie lange ist die Strecke im System des Raumfahrers?
   b) Wie lange braucht der Raumfahrer für die Reise aus seiner eigenen Sicht?
   c) Wie lange braucht er aus Sicht einer Person, die auf der Erde geblieben ist?

7. Bei einer 2,0 Millionen Lichtjahre von der Erde entfernten Super-Nova-Explosion treten Lichtteilchen (Photonen) und Protonen gleichzeitig ihre Reise zu Erde an.
   Das Proton kommt 2,0 Stunden nach dem Photon auf der Erde an.
   Wie lange dauerte die Reise des Protons in seinem Ruhesystem?

8. Der nächste Fixstern (Proxima Centauri) ist 4,3 Lichtjahre von der Erde entfernt. Astronaut Pirx behauptet, dass er mit seinem superschnellen Raumschiff in 2,0 Jahren von der Erde zu Proxima Centauri reisen kann. Ist das wirklich möglich?
   Wenn ja, mit welcher Geschwindigkeit muss Pirx reisen und wie lange dauert diese Reise von der Erde aus beurteilt?

Physik * Q11 * Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie * Lösungen



1. a) $E_o = m_o c^2 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot (3{,}0 \cdot 10^8 \,\dfrac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 8{,}199 \cdot 10^{-14}\,\text{J} =$

$8{,}199 \cdot 10^{-14}\,\text{VAs} = 8{,}199 \cdot 10^{-14}\,\text{V} \cdot \dfrac{\text{As} \cdot \text{e}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As}} = 512 \cdot 10^3\,\text{eV}$

(bei Rechnung mit höherer Genauigkeit: $E_o = 0{,}511$ MeV)

b) $m = 2m_o \Rightarrow E = 2E_o = E_o + E_{kin} \Rightarrow eU = E_{kin} = E_o = 511\,\text{keV} \Rightarrow U = 511\,\text{kV}$

c) $2m_o = \dfrac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0{,}5 \Rightarrow 1 - v^2/c^2 = 0{,}25 \Rightarrow v^2 = 0{,}75c^2 \Rightarrow v = 0{,}87c$

2. a) $E_{kin} = 900\,\text{keV}$ und $E_o = 511\,\text{keV}$ und $mc^2 = E = E_o + E_{kin} = 1411\,\text{keV} = \dfrac{1411\,\text{keV}}{511\,\text{keV}} m_o c^2 \Rightarrow$

$mc^2 = \dfrac{1411}{511} m_o c^2 \Rightarrow \dfrac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{1411}{511} m_o c^2 \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} = \dfrac{511}{1411} \Rightarrow$

$1 - v^2/c^2 = \dfrac{511^2}{1411^2} \Rightarrow v^2/c^2 = 0{,}86884... \Rightarrow v = 0{,}93c$ und $m = \dfrac{1411}{511} m_o = 2{,}76\,m_o$

b) $v = 0{,}99c \Rightarrow E = mc^2 = \dfrac{m_o c^2}{\sqrt{1 - 0{,}99^2}} = 7{,}1 \cdot m_o c^2 \Rightarrow E_{kin} = 6{,}1 \cdot m_o c^2 = 6{,}1 \cdot 511\,\text{keV} = 3{,}12\,\text{MeV}$

Die Elektronen müssen also eine Spannung von 3,12 MV durchlaufen und die Masse der Elektronen beträgt 7,1 Ruhemassen.

c) $m = 1{,}02m_o = \dfrac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} = \dfrac{100}{102} \Rightarrow 1 - v^2/c^2 = \dfrac{2500}{2601} \Rightarrow v^2 = \dfrac{101}{2601} c^2 \Rightarrow$

$v = 0{,}20c$; $E_{kin} = 0{,}02E_o = 0{,}02 \cdot 511\,\text{keV} = 10\,\text{keV} \Rightarrow$ benötigte Spannung U = 10 kV

3. $3{,}8 \cdot 10^{26}\,\text{J} = m \cdot c^2 \Rightarrow m = \dfrac{3{,}8 \cdot 10^{26}\,\text{J}}{(3{,}0 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2} = 4{,}2 \cdot 10^9\,\text{kg}$

Pro Sekunden „verliert“ die Sonne 4,2 Millionen Tonnen an Masse.

Das sind $4{,}2 \cdot 10^9\,\text{kg} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 = 1{,}3 \cdot 10^{17}\,\text{kg}$ Massenverlust pro Jahr.<

$(1\%\text{ von } 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\text{kg}) : (1{,}3 \cdot 10^{17}\,\text{kg}) = 1{,}5 \cdot 10^{11}$

Erst nach 150 Milliarden Jahren hätte die Sonne 1% ihrer Masse verloren.

4. $E_{kin} = 1{,}0\,\text{MeV} \Rightarrow E = E_o + E_{kin} = 1{,}0\,\text{MeV} + 0{,}511\,\text{MeV} = 1{,}511\,\text{MeV} = \dfrac{1{,}511}{0{,}511} E_o = 2{,}96\,E_o$

$m = 2{,}96\,m_o = \dfrac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} = \dfrac{1}{2{,}96} \Rightarrow 1 - v^2/c^2 = \dfrac{1}{2{,}96^2} \Rightarrow$

$v^2 = 0{,}88586...c^2 \Rightarrow v = 0{,}94c$

Kreisbahn: $F_{Zentripetal} = F_{Lorentz} \Rightarrow \dfrac{mv^2}{r} = evB \Rightarrow r = \dfrac{mv}{eB} = \dfrac{2{,}96\,m_o \cdot 0{,}94c}{eB} =$

$\dfrac{2{,}96 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As} \cdot 0{,}45\,\text{T}} = 0{,}011\,\text{m} = 1{,}1\,\text{cm}$

5. Wienfilter: $qvB = qE \;\Rightarrow\; v = \dfrac{E}{B} = \dfrac{7{,}00\cdot 10^5\ \mathrm{V/m}}{0{,}00400\,\mathrm{T}} = 1{,}75\cdot 10^8\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Kreisbahn: $\dfrac{m\,v^2}{r} = e\,v\,B \;\Rightarrow\; \dfrac{m_o\,v}{r\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}} = e\,B \;\Rightarrow\; \dfrac{e}{m_o} = \dfrac{v}{r\cdot B\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}} =$

$$\frac{1{,}75\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{0{,}306\,\mathrm{m}\cdot 0{,}004\,\mathrm{T}\cdot\sqrt{1-(1{,}75/3{,}0)^2}} = 1{,}76\cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{kg}}$$

und das ist genau die spezifische Ladung des Elektrons. Es handelt sich also um Elektronen.

6. a) 5,0 Lichtjahre $= 5{,}0\,a\cdot c$ entspricht $5{,}0\,a\cdot c\cdot\sqrt{1-0{,}75^2} = 3{,}3\,a\cdot c = 3{,}3$ Lichtjahre im System des Raumschiffs.

b) Bei einer Geschwindigkeit von 0,75 c benötigt der Raumfahrer für die 3,3 Lichtjahre $\dfrac{3{,}3\,a\cdot c}{0{,}75\,c} = 4{,}4\,a = 4{,}4$ Jahre nach seiner Zeit.

c) Von der Erde aus benötigt der Raumfahrer für die 5 Lichtjahre große Entfernung mit einer Geschwindigkeit von 0,75 c die Zeit $t = \dfrac{5\,a\cdot c}{0{,}75\,c} = 6{,}7\,a = 6{,}7$ Jahre.

7. Die Lichtteilchen benötigen mit der Geschwindigkeit c für die Strecke 2,0 Millionen Jahre.
Die Protonen benötigen mit der Geschwindigkeit v für diese Strecke $2{,}0\cdot 10^6 a + 7200\,s$.

Also $v = \dfrac{2{,}0\cdot 10^6\,a\cdot c}{\left(2{,}0\cdot 10^6 + \dfrac{1}{365{,}25\cdot 12}\right)a} = 0{,}999999999885\,c$.

Die Strecke von 2,0 Millionen Lichtjahren ist für das Proton verkürzt auf

$\sqrt{1-0{,}999999999885^2}\cdot 2{,}0\cdot 10^6\,a\cdot c = 40\,a\cdot c$.

Bei einer Geschwindigkeit von 0,999999999885c benötigt das Proton dafür 40 Jahre.

8. Wegen der Längenkontraktion kann Astronaut Pirx die Strecke von 4,3 Lichtjahren tatsächlich in 2,0 Jahren mit der Geschwindigkeit v durchfliegen.

$v\cdot 2{,}0\,a = 4{,}3\,a\cdot c\cdot\sqrt{1-v^2/c^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2{,}15\,c \;\Rightarrow\; \dfrac{v^2}{1-v^2/c^2} = 4{,}6225\,c^2 \;\Rightarrow$

$v^2 = 4{,}6225\cdot\left(c^2 - v^2\right) \;\Rightarrow\; 5{,}6225\,v^2 = 4{,}6225\,c^2 \;\Rightarrow\; v = 0{,}907\,c$

Von der Erde aus beurteilt dauert die Reise von Pirx $\dfrac{4{,}3\cdot a\cdot c}{0{,}907\,c} = 4{,}7\,a = 4{,}7$ Jahre.