

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Rechnen mit reellen Zahlen



1. Bestimme die maximale Definitionsmenge des Terms.

a) $\sqrt{2x}$ b) $\sqrt{2-x}$ c) $\sqrt{2x+6}$
d) $\sqrt{-x} + \sqrt{x+4}$ e) $\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ f) $\frac{3 \cdot \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}-2}$

Beachte im Folgenden:

Alle Endergebnisse werden immer so weit wie möglich radiziert, der Nenner wird immer rational gemacht.

2. Radiziere so weit wie möglich. (Es gelte $a > 0$, $b > 0$, $c \in \mathbb{R}$)

a) $\sqrt{49+626}$ b) $\sqrt{960}$ c) $\sqrt{12 \cdot 28 \cdot 21}$
d) $\sqrt{8ab^2}$ e) $\sqrt{18b^3c^2}$ f) $\sqrt{30a^2 \cdot 105c^3}$

3. Mache den Nenner rational!

a) $\frac{2}{\sqrt{75}}$ b) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$
d) $\sqrt{3\frac{1}{8}}$ e) $\sqrt{22,05}$ f) $\sqrt{1\frac{2}{5} + 2\frac{1}{3}}$

4. Vereinfache den Term

a) $\sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{2 \cdot 18}}}$ b) $2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{18}) - \sqrt{3} \cdot (12 + 3\sqrt{6})$
c) $(\sqrt{8} - 3 \cdot \sqrt{18} + 2 \cdot \sqrt{32}) \cdot \sqrt{2}$ d) $(3 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{80}) \cdot 2\sqrt{5}$
e) $\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{10}}$ f) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2}$

5. Berechne mit dem Taschenrechner und runde das Ergebnis auf Hundertstel.

a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{12} - \sqrt{11}}$
c) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$ d) $\sqrt{\frac{\sqrt{13} - \sqrt{7}}{\sqrt{5}}} + 3$

1. a) $\sqrt{2x}$; $D = \mathbb{R}_0^+$ b) $\sqrt{2-x}$; $D =]-\infty; 2]$
 c) $\sqrt{2x+6}$; $D = [-3; \infty[$ d) $\sqrt{-x} + \sqrt{x+4}$; $D = [-4; 0]$
 e) $\frac{2}{\sqrt{x}-1}$; $D = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ f) $\frac{3 \cdot \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}-2}$; $D = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$



2. a) $\sqrt{49+626} = \sqrt{675} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 3} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 15\sqrt{3}$
 b) $\sqrt{960} = \sqrt{64 \cdot 15} = 8\sqrt{15}$
 c) $\sqrt{12 \cdot 28 \cdot 21} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{4^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$
 d) $\sqrt{8ab^2} = \sqrt{4b^2 \cdot 2a} = 2b \cdot \sqrt{2a}$ (denn $b \geq 0$)
 e) $\sqrt{18b^3c^2} = \sqrt{9 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot 2b} = 3 \cdot b \cdot |c| \cdot \sqrt{2b} = 3b|c|\sqrt{2b}$ (denn $c \in \mathbb{R}$)
 f) $\sqrt{30a^2 \cdot 105c^3} = \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot c^2 \cdot c} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot 14c} = 15ac\sqrt{14c}$
 (c muss hier $\mu 0$ sein, denn für $c < 0$ wäre der Radikand negativ. Man benötigt also keine Betragsstriche.)

3. a) $\frac{2}{\sqrt{75}} = \frac{2}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$
 b) $\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5})} = \frac{6-2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2 \cdot (3-\sqrt{5})}{2 \cdot 2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
 c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3-5} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$
 d) $\sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4} = (1,25\sqrt{2})$
 e) $\sqrt{22,05} = \sqrt{\frac{2205}{100}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 9 \cdot 49}{100}} = \frac{3 \cdot 7 \cdot \sqrt{5}}{10} = \frac{21\sqrt{5}}{10} (= 2,1\sqrt{5})$
 f) $\sqrt{1\frac{2}{5} + 2\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{21+35}{15}} = \sqrt{\frac{56 \cdot 15}{15 \cdot 15}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}}{15} = \frac{2\sqrt{210}}{15}$

4. a) $\sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{2 \cdot 18}}} = \sqrt{11 + \sqrt{19 + 6}} = \sqrt{11 + 5} = \sqrt{16} = 4$

b) $2 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{18}) - \sqrt{3} \cdot (12 + 3\sqrt{6}) = 2 \cdot \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 2} + 2 \cdot \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 3} = 12\sqrt{2} + 12\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{8} - 3 \cdot \sqrt{18} + 2 \cdot \sqrt{32}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} - 3 \cdot \sqrt{18 \cdot 2} + 2 \cdot \sqrt{32 \cdot 2} = 4 - 3 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 2$

d) $(3 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{80}) \cdot 2\sqrt{5} = (3 \cdot \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10 \cdot 5 = 50$

e) $\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{10}} = \frac{(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{10} - 3)}{(3 + \sqrt{10}) \cdot (\sqrt{10} - 3)} = \frac{2\sqrt{5 \cdot 10} - 6\sqrt{5} - \sqrt{2 \cdot 10} + 3\sqrt{2}}{10 - 9} =$
 $2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = 13\sqrt{2} - 8\sqrt{5}$

f) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2} = \frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2) \cdot (\sqrt{6} - 2)} = \frac{2\sqrt{18} - 4\sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{6}}{6 - 4} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{6}$

5. a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = 2,23771042... \approx 2,24$

b) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{12} - \sqrt{11}} = 24,4482567... \approx 24,45$

c) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} = 0,40908243... \approx 0,41$

d) $\sqrt{\frac{\sqrt{13} - \sqrt{7}}{\sqrt{5}}} + 3 = 1,85181953... \approx 1,85$