Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Berechnung von Wurzeln mit dem Heron-Verfahren

Mit geeigneten Programmen kann man Quadratwurzeln auf viele Stellen genau berechnen.
(Z.B. mit dem Taschenrechner auf http://web2.0rechner.de/ [Unterstützung für große Zahlen verwenden und statt die Wurzel aus 5 die Wurzel aus 500000000000000000000 berechnen!)
Die Division großer Zahlen ist auf der Seite http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/dividieren1.htm möglich!)

$\sqrt{5} = 2,2360679774997896964091736687312\ldots$

Nach dem Heron – Verfahren mit $x_{i+1} = (x_i + 5/x_i)/2$ und dem Startwert $x_o = 2$ folgt:

$$x_1 = (2+\frac{5}{2}):2 = \frac{2\cdot 2+5}{2}:2 = \frac{2\cdot 2+5}{2\cdot 2} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$x_2 = (\frac{9}{4}+\frac{5}{\frac{9}{4}}):2 = (\frac{9}{4}+\frac{5\cdot 4}{9}):2 = (\frac{9\cdot 9+5\cdot 4\cdot 4}{4\cdot 9}):2 = \frac{9\cdot 9+5\cdot 4\cdot 4}{4\cdot 9\cdot 2} = \frac{161}{72} = 2,236111111...$$

$$x_3 = (\frac{161}{72}+\frac{5}{\frac{161}{72}}):2 = (\frac{161}{72}+\frac{5\cdot 72}{161}):2 = \frac{161^2+5\cdot 72^2}{72\cdot 161\cdot 2} = \frac{51841}{23184} = 2,2360679791580...$$

$$x_4 = (\frac{51841}{23184}+\frac{5\cdot 23184}{51841}):2 = \frac{51841^2+5\cdot 23184^2}{23184\cdot 51841\cdot 2} = \frac{5374978561}{2403763488} = 2,236067977499789696447...$$

$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463...$

Nach dem Heron – Verfahren mit $x_{i+1} = (x_i + 3/x_i)/2$ und dem Startwert $x_o = 2$ folgt:

$$x_1 = (2+\frac{3}{2}):2 = \frac{2\cdot 2+3}{2}:2 = \frac{2\cdot 2+3}{2\cdot 2} = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$x_2 = (\frac{7}{4}+\frac{3}{\frac{7}{4}}):2 = (\frac{7}{4}+\frac{3\cdot 4}{7}):2 = (\frac{7\cdot 7+3\cdot 4\cdot 4}{4\cdot 7}):2 = \frac{7\cdot 7+3\cdot 4\cdot 4}{4\cdot 7\cdot 2} = \frac{97}{56} = 1,732142857...$$

$$x_3 = (\frac{97}{56}+\frac{3}{\frac{97}{56}}):2 = \frac{97^2+3\cdot 56^2}{56\cdot 97\cdot 2} = \frac{18817}{10864} \approx 1,7320508100147 27...$$

$$x_4 = (\frac{18817}{10864}+\frac{3\cdot 10864}{18817}):2 = \frac{18817^2+3\cdot 10864^2}{10864\cdot 18817\cdot 2} = \frac{708158977}{408855776} \approx 1,7320508075688772952543...$$

Allgemein gilt beim Heronverfahren zur Berechnung von $\sqrt{a}$:

Ist $x_i = \frac{z_i}{n_i}$ so gilt $x_{i+1} = \frac{z_{i+1}}{n_{i+1}} = \frac{z_i^2 + a\cdot n_i^2}{2\cdot z_i\cdot n_i}$

Um 100 n. Chr. wurde es Verfahren von Heron von Alexandria im ersten Buch seines Werkes *Metrica* beschrieben.
Heron von Alexandria (genannt *Mechanicus*, geboren ca. 10 n.Chr. gestorben etwa 70 n.Chr.) war ein griechischer Mathematiker und Ingenieur.
Er lehrte am Museion von Alexandria, dessen Bibliothek berühmt war.

Darstellung Herons in einer deutschen Ausgabe der *Pneumatika* von 1688