

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zum Rechnen mit Wurzeln

1. Bestimme den Definitionsbereich!

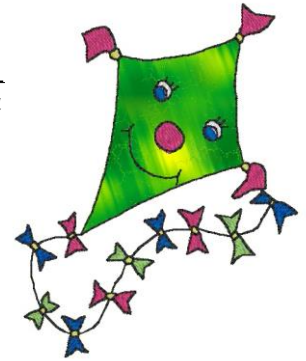
a) $\sqrt{2x+3}$ b) $\sqrt{3-2x}$ c) $\sqrt{x^2-4}$ d) $\sqrt{x \cdot (3-x)}$

2. Vereinfache!

a) $\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$ b) $\sqrt{8} \cdot (3\sqrt{2a} + 5\sqrt{18a})$
c) $\sqrt{10} \cdot (5\sqrt{5} - \sqrt{20})$ d) $(5\sqrt{3a} - 2\sqrt{12a}) \cdot \sqrt{27a}$

3. Gib den Definitionsbereich für x, y und z an!
Radiziere dann so weit wie möglich!

a) $\sqrt{242x^3y^2z^6}$ b) $\sqrt{8x^2 - 24xy + 18y^2}$
c) $\sqrt{12a^2 - 12ab + 3b^2}$ d) $\sqrt{18x^3 - 48x^2y + 32xy^2}$



4. Mache den Nenner rational!

a) $\frac{\sqrt{75}}{2 \cdot \sqrt{6}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{20}}$ c) $\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ d) $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{1,5}$
e) $\frac{a}{2\sqrt{3ab^2}}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{a - \sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ h) $\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 3}$

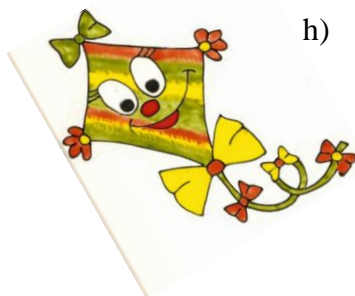
5. Vereinfache so weit wie möglich.

a) $\frac{\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ b) $\frac{3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{5\sqrt{3} - 15}{\sqrt{20}}$

6. Bestimme alle Lösungen der Gleichung!

Bei Wurzelgleichungen ist die Probe erforderlich!

a) $(x-2) \cdot (x+3) = 10 + x$ b) $(2x-3)^2 - 5 = 4 \cdot (4-3x)$
c) $\sqrt{2x+17} = 1+x$ d) $2-3x = \sqrt{4 \cdot (5-3x)}$
e) $\sqrt{x^2 + 6x + 33} = 1+3x$ f) $\sqrt{4x^2 + 2x + 7} = 2x+1$
g) $3+x = \sqrt{13+6x}$ h) $3-x = \sqrt{34-6x}$



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zum Rechnen mit Wurzeln * Lösungen

1. a) $x \in [-1,5; \infty[$ b) $x \in]-\infty; 1,5[$
 c) $x \in \mathbb{R} \setminus]-2; 2[$ d) $x \in [0; 3]$



2. a) $\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{18} - 3 \cdot \sqrt{12} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{3}$
 b) $\sqrt{8} \cdot (3\sqrt{2a} + 5\sqrt{18a}) = 3 \cdot \sqrt{16a} + 5 \cdot \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9a} = 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{a} + 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{a} = 72 \sqrt{a}$
 c) $\sqrt{10} \cdot (5\sqrt{5} - \sqrt{20}) = 5 \cdot \sqrt{50} - \sqrt{200} = 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 10 \cdot \sqrt{2} = 25\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$
 d) $(5\sqrt{3a} - 2\sqrt{12a}) \cdot \sqrt{27a} = 5 \cdot \sqrt{81a^2} - 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 3 \cdot a \cdot 3 \cdot 9 \cdot a} = 5 \cdot 9 \cdot a - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a = 9a$

3. a) $\sqrt{242x^3y^2z^6} = 11x \cdot |y| \cdot |z^3| \cdot \sqrt{2x}$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+, y, z \in \mathbb{R}$;
 b) $\sqrt{8x^2 - 24xy + 18y^2} = \sqrt{2 \cdot (4x^2 - 12xy + 9y^2)} = |2x - 3y| \cdot \sqrt{2}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$
 c) $\sqrt{12a^2 - 12ab + 3b^2} = \sqrt{3 \cdot (4a^2 - 4ab + b^2)} = \sqrt{3 \cdot (2a - b)^2} = |2a - b| \cdot \sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
 d) $\sqrt{18x^3 - 48x^2y + 32xy^2} = \sqrt{2x \cdot (9x^2 - 24xy + 16y^2)} = \sqrt{2x \cdot (3x - 4y)^2} = |3x - 4y| \cdot \sqrt{2x}$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $y \in \mathbb{R}$

4. a) $\frac{\sqrt{75}}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 25 \cdot 3}}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4}$
 b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} + \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{10} + \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{10} + \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{10} = \frac{9 \cdot \sqrt{10}}{10} = 0,9 \cdot \sqrt{10}$
 c) $\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} + 3}{3 \cdot 3} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3} + 1)}{3 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3}$
 d) $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{1,5} = \frac{(3 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$
 e) $\frac{a}{2\sqrt{3ab^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{3a}}{2 \cdot |b| \cdot \sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a}} = \frac{a \cdot \sqrt{3a}}{2 \cdot |b| \cdot 3a} = \frac{\sqrt{3a}}{6 \cdot |b|}$ (mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
 f) $\frac{\sqrt{2}}{a - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (a + \sqrt{2})}{(a - \sqrt{2}) \cdot (a + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \cdot a + 2}{a^2 - 2}$ (mit $a \neq \sqrt{2}$ [und $a \neq -\sqrt{2}$])
 g) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3 - 2} = 3 - \sqrt{6}$
 h) $\frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 3} = \frac{(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + 3) \cdot (3 - \sqrt{2})} = \frac{9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2}{9 - 2} = \frac{11 - 6\sqrt{2}}{7}$



$$5. a) \frac{\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3 \cdot 6} - 3\sqrt{2 \cdot 6}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} =$$

$$\frac{(2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2 - 3} = -1 \cdot (6 \cdot 2 + 6 \cdot \sqrt{6} - 6 \cdot \sqrt{6} - 6 \cdot 3) = 6$$

$$b) \frac{3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{15 + 5 \cdot \sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{3} - 15}{2 \cdot \sqrt{20}} = \frac{(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{5})}{5 \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5})} - \frac{(5\sqrt{3} - 15) \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} =$$

$$\frac{9\sqrt{5} - 3 \cdot 5 - 15\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{5 \cdot (9 - 5)} - \frac{5 \cdot \sqrt{15} - 15 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 2 \cdot 5} =$$

$$\frac{9\sqrt{5} - 3 \cdot 5 - 15\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{20} - \frac{5 \cdot \sqrt{15} - 15 \cdot \sqrt{5}}{20} = \frac{24\sqrt{5} - 15 - 15\sqrt{3}}{20}$$



6.

$$a) (x-2) \cdot (x+3) = 10+x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 10+x \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$$

$$b) (2x-3)^2 - 5 = 4 \cdot (4-3x) \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 5 = 16 - 12x \Leftrightarrow 4x^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow 4x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{3}$$

$$c) \sqrt{2x+17} = 1+x \Leftrightarrow 2x+17 = 1+2x+x^2 \Leftrightarrow 16 = x^2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$$

Probe für $x_1 = 4$: l.S.: $\sqrt{2 \cdot 4 + 17} = \sqrt{25} = 5$ und r.S. $1+4=5$

Probe für $x_2 = -4$: l.S.: $\sqrt{2 \cdot (-4) + 17} = \sqrt{9} = 3$ und r.S. $1-4 = -3 \neq 3$ also $L = \{4\}$

$$d) 2-3x = \sqrt{4 \cdot (5-3x)} \Leftrightarrow 4-12x+9x^2 = 20-12x \Leftrightarrow 9x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{4}{3}$$

Probe für $x_1 = \frac{4}{3}$: l.S.: $2-3 \cdot \frac{4}{3} = -2$ und r.S. $\sqrt{4 \cdot (5-3 \cdot \frac{4}{3})} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2 \neq -2$

Probe für $x_2 = -\frac{4}{3}$: l.S.: $2-3 \cdot (-\frac{4}{3}) = 6$ und r.S. $\sqrt{4 \cdot (5-3 \cdot (-\frac{4}{3}))} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ also $L = \{-\frac{4}{3}\}$

$$e) \sqrt{x^2 + 6x + 33} = 1+3x \Leftrightarrow x^2 + 6x + 33 = 1+6x+9x^2 \Leftrightarrow 32 = 8x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

Probe für $x_1 = 2$: l.S.: $\sqrt{4 + 6 \cdot 2 + 33} = \sqrt{49} = 7$ und r.S. $1+3 \cdot 2 = 7$

Probe für $x_2 = -2$: l.S.: $\sqrt{4 + 6 \cdot (-2) + 33} = \sqrt{25} = 5$ und r.S. $1+3 \cdot (-2) = -5 \neq 5$ also $L = \{2\}$

$$f) \sqrt{4x^2 + 2x + 7} = 2x+1 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 7 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow 6 = 2x \Leftrightarrow x = 3$$

Probe für $x = 3$: l.S.: $\sqrt{4 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 7} = \sqrt{49} = 7$ und r.S. $2 \cdot 3 + 1 = 7$ also $L = \{3\}$

$$g) 3+x = \sqrt{13+6x} \Leftrightarrow 9+6x+x^2 = 13+6x \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

Probe für $x_1 = 2$: l.S.: $3+2=5$ und r.S. $\sqrt{13+6 \cdot 2} = \sqrt{25} = 5$

Probe für $x_2 = -2$: l.S.: $3-2=1$ und r.S. $\sqrt{13+6 \cdot (-2)} = \sqrt{1} = 1$ also $L = \{2; -2\}$

$$h) 3-x = \sqrt{34-6x} \Leftrightarrow 9-6x+x^2 = 34-6x \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 5$$

Probe für $x_1 = 5$: l.S.: $3-5=-2$ und r.S. $\sqrt{34-6 \cdot 5} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$

Probe für $x_2 = -5$: l.S.: $3-(-5)=8$ und r.S. $\sqrt{34-6 \cdot (-5)} = \sqrt{64} = 8$
also $L = \{-5\}$

