Historische Aufgaben aus der Kombinatorik

1. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) dachte, es sei mit zwei Würfeln ebenso leicht, eine 11 wie eine 12 zu würfeln. Entscheide, ob er Recht hatte.

G.W. Leibniz

2. **Die Aufgaben des Chevalier de Meré**

B. Pascal

Chevalier de Meré

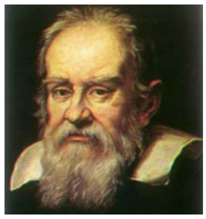
Als eigentliche Geburtsstunde der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt das Jahr 1654. Chevalier de Meré, ein Philosoph und Literat am Hofe Ludwigs des XIV, wandte sich mit zwei Problemen an den bekannten Mathematiker Blaise Pascal:

a) Eine Münze wird wiederholt geworfen. Für jede „1” erhält A einen Punkt, für jede „0” erhält B einen Punkt. Wer zuerst 5 Punkte erzielt, gewinnt den Einsatz. Nach 7 Würfen hat A 4 Punkte und B 3 Punkte. Das Spiel wird abgebrochen. Welches ist die gerechte Aufteilung des Einsatzes: Nach Maßgabe der gewonnenen Spiele, also 4 : 3 , oder nach Maßgabe der noch fehlenden Spiele, also 2 : 1 ?

b) Was ist wahrscheinlicher, bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine „6” zu werfen oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln eine „Doppelsechs”?

Beide Probleme waren damals schon viele Jahrhunderte alt. Alle früheren Lösungen waren jedoch falsch.

3. **Die Aufgabe von Galileo Galilei**



Galileo

Der Fürst von Toskana fragte Galilei: Warum erscheint beim Wurf dreier Würfel die Summe 10 öfter als die Summe 9 , obwohl beide Summen auf genau 6 Arten eintreten können?

$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4$

$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$

Dies war damals eine viel diskutierte, Jahrhunderte alte Aufgabe. Der berühmte Physiker hat die richtige Antwort gefunden. (Der Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten ist sehr klein und kann experimentell nur sehr schwer gefunden werden!)

4. **Drei Aufgaben aus dem „Tractatus de ratiociniis in aleae ludo”** von Christian Huygens (1629 - 1695)

Christian Huygens

a) **Problem XIV**
Wenn ich und ein anderer abwechselnd 2 Würfel werfen unter der Bedingung, dass ich gewinne, wenn ich „7” werfe, er aber, wenn er „6” wirft, und ich ihm den ersten Wurf lasse, wie verhalten sich dann die Gewinnchancen? (Hinweis: Jacob Bernoulli (1655-1705) löste diese und die nächste Aufgabe mit Hilfe einer geometrischen Reihe.)

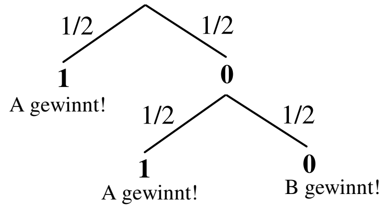
b) **Problem I** (schwer)
A und B spielen mit zwei Würfeln unter der Bedingung, dass der jeweilige Würfelwerfer gewinnt, wenn er die Augensumme 6 wirft; bei der Augensumme 7 dagegen gewinnt der Gegner. In allen anderen Fällen geht das Spiel weiter.
A beginnt das Spiel mit einem Wurf, dann hat B zwei Würfe hintereinander, dann ebenso A zwei Würfe, und so fort, bis schließlich einer gewinnt.
Wie verhält sich die Hoffnung von A zu der von B?

c) **Problem III**
A wettet mit B, dass er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 von derselben Farbe sind, vier Karten verschiedener Farbe herausziehen wird.
Wie müssen sich die Einsätze verhalten, damit die Wette fair ist?

Historische Aufgaben aus der Kombinatorik * Lösungen

1. $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$; $|"\text{Augensumme } 11"| = 2$ aber $|"\text{Augensumme } 12"| = 1$
   denn $11 = 6 + 5 = 5 + 6$ aber $12 = 6 + 6$
   also $P("\text{Augensumme } 11") = 2/36$ aber $P("\text{Augensumme } 12") = 1/36$ (Leibniz hat nicht Recht!)

2. a) Nach der 7 Würfen spielt man „in Gedanken“ weiter und untersucht, mit welcher Wahrscheinlichkeit A bzw. B nun gewinnt.



P(„A gewinnt nun“) = ½ + ½ · ½ = ¾

P(„B gewinnt nun“) = ½ · ½ = ¼

Der Einsatz sollte also im Verhältnis 3 : 1 aufgeteilt werden, denn die Chancen von A das Spiel zu gewinnen, war nach dem gegebenen Stand dreimal so groß wie die von B.

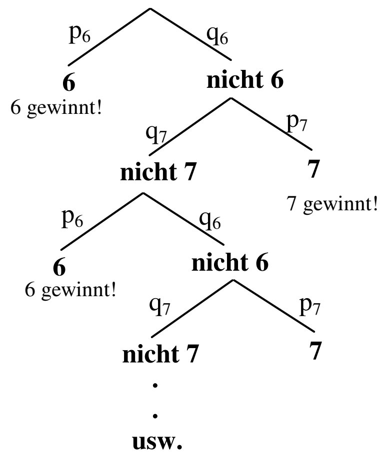
b) A = „Mindestens eine 6 bei 4 Würfen mit einem Würfel“
B = „Mindestens eine Doppel-6 bei 24 Würfen mit zwei Würfeln“

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 51{,}775\% \; ; \; P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 49{,}140\%$$

3. $|\Omega| = 6^3 = 216$; $|"10"| = 3 \cdot 3! + 3 \cdot 3 = 27$; $|"9"| = 3 \cdot 3! + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 25$
   P(„10“) = 27/216 = 12,5% ; P(„9“) = 25/216 ≈ 11,6%

4. $P("7 \text{ bei einem Wurf}") = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = p_7$; $P("6 \text{ bei einem Wurf}") = \frac{5}{36} = p_6$

$q_7 = 1 - p_7$ und $q_6 = 1 - p_6$



a) $P("6 \text{ gewinnt}") = p_6 + q_6 \cdot q_7 \cdot p_6 + q_6 \cdot q_7 \cdot q_6 \cdot q_7 \cdot p_6 + \ldots$

$$= p_6 + z \cdot p_6 + z^2 \cdot p_6 + z^3 \cdot p_6 + \ldots$$

$$= p_6 (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) \quad \text{mit } z = q_6 \cdot q_7 = \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{155}{216}$$

Man nennt $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$ geometrische Reihe.
Trick zur Berechnung der geometrischen Reihe:
Für $S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n$ gilt:

$z \cdot S_n = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + z^{n+1}$ und damit

$S_n - z \cdot S_n = 1 - z^{n+1}$ also $(1 - z) \cdot S_n = 1 - z^{n+1}$

Daraus folgt $S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$. Wenn n immer größer wird, dann wird $z^{n+1} = \left(\frac{155}{216}\right)^{n+1}$

immer näher an 0 herangehen. D.h. $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1 - z}$ und daher

$$P("6 \text{ gewinnt}") = p_6 (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1 - 155/216} = \frac{30}{61} \approx 49{,}18\%$$

P(„7 gewinnt“) = 31/61 λ 50,82%

b) $P("A \text{ gewinnt}") = p_6 + w \cdot p_7 + w^2 \cdot p_6 + w^3 \cdot p_7 + \ldots$ mit $w = 1 - p_6 - p_7 = \frac{25}{36}$

Also $P("A \text{ gewinnt}") = p_6 (1 + w^2 + w^4 + \ldots) + w \cdot p_7 (1 + w^2 + w^4 + \ldots)$

Mit dem Trick von a) folgt $1 + w^2 + w^4 + \ldots = \frac{1}{1 - w^2} = \ldots = \frac{1296}{671}$ und damit

$$P("A \text{ gewinnt}") = \frac{5}{36} \cdot \frac{1296}{671} + \frac{25}{216} \cdot \frac{1296}{671} = \frac{30}{61} \approx 49{,}18\%$$

c) Einsätze sollten etwa im Verhältnis 11 : 89 verteilt sein, denn A gewinnt nur mit ca. 11%.