Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Vermischte Aufgaben zum Üben

1. Vereinfache so weit wie möglich und gib das Ergebnis in Wurzelschreibweise an.

a) $\sqrt[3]{4a^2 \cdot \sqrt[4]{8a^3 \cdot \sqrt{16a^4}}}$ b) $\sqrt[3]{20b^2 \cdot \sqrt{24b^3 \cdot \sqrt[5]{16b^4}}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{6x^2} \cdot \sqrt[4]{72x^3} \cdot \sqrt{8x^3}}{\sqrt[3]{3x^2} \cdot \sqrt[4]{2x^2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{6xy \cdot \sqrt[3]{xy^2} \cdot \sqrt{6x^3y}}}{\sqrt[12]{6xy} \cdot \sqrt[6]{6x^2}}$

2. Bestimme alle Lösungen der Gleichung!

a) $2 \cdot x^3 + 4 \cdot 5 = 6$ b) $2 \cdot \sqrt[3]{x} - 4 = 6$

c) $2 \cdot (3 - x^4) + 5 = 6$ d) $2 \cdot (3 - \sqrt[3]{x^2}) + 5 = 6$

e) $\dfrac{36}{x^5} = \dfrac{x}{48}$ f) $\dfrac{18}{x^3} = -\dfrac{x^2}{27}$

g) $x^8 - 2x^4 = 8$ h) $\sqrt[3]{x} + 4 = \sqrt[6]{x}$

i) $x^3 + \dfrac{16}{x^3} = 8$ k) $\sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 3$

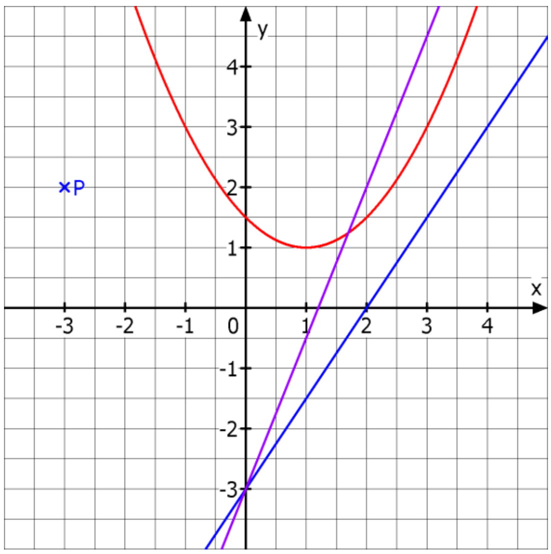
l) $x^4 + \dfrac{4}{x^4} = 5$ m) $\sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 1$

3. Zur Familie Huber gehören Papa, Mama, Anna und Bernd.
Mama ist dreimal so alt wie Anna und um 3 Jahre jünger als Papa.
Alle Familienmitglieder bringen es zusammen auf 121 Lebensjahre.
Mamas Alter beträgt um 12 Jahre mehr als der Altersunterschied von Papa und Anna.
Um wie viele Jahre ist Anna älter oder jünger als ihr Bruder?

4. Das Bild zeigt die Graphen von drei Funktionen.

a) Gib die Funktionsgleichungen für die Parabel und die beiden Geraden an.

b) Es gibt Geraden mit der Funktionsgleichung $g(x) = m \cdot x - 3$, welche die Parabel gerade berühren. Bestimme den Wert der Steigung m und berechne den zugehörigen Berührpunkt.



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Vermischte Aufgaben zum Üben * Lösungen

1. a) $\sqrt[3]{4a^2 \cdot \sqrt[4]{8a^3 \cdot \sqrt{16a^4}}} = \left(2^2 \cdot a^2 \cdot (2^3 \cdot a^3 \cdot (2^4 \cdot a^4)^{1/2})^{1/4} \right)^{1/3} = \left(2^2 \cdot a^2 \cdot (2^3 \cdot a^3 \cdot 2^2 \cdot a^2)^{1/4} \right)^{1/3} =$

$\left(2^2 \cdot a^2 \cdot (2^5 \cdot a^5)^{1/4} \right)^{1/3} = \left(2^2 \cdot a^2 \cdot 2^{5/4} \cdot a^{5/4} \right)^{1/3} = \left(2^{13/4} \cdot a^{13/4} \right)^{1/3} = 2^{13/12} \cdot a^{13/12} = 2a \cdot \sqrt[12]{2a}$

b) $\sqrt[3]{20b^2 \cdot \sqrt{24b^3 \cdot \sqrt[5]{16b^4}}} = \left(2^2 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot b^3 \cdot (2^4 \cdot b^4)^{1/5})^{1/2} \right)^{1/3} =$

$\left(2^2 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot b^3 \cdot 2^{4/5} \cdot b^{4/5})^{1/2} \right)^{1/3} = \left(2^2 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot (3 \cdot 2^{19/5} \cdot b^{19/5})^{1/2} \right)^{1/3} =$

$\left(2^2 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{19/10} \cdot b^{19/10} \right)^{1/3} = \left(5 \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{39/10} \cdot b^{39/10} \right)^{1/3} = 5^{1/3} \cdot 3^{1/6} \cdot 2^{39/30} \cdot b^{39/30} =$

$5^{1/3} \cdot 3^{1/6} \cdot 2^{13/10} \cdot b^{13/10} = 2b \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[10]{2^3 \cdot b^3} \quad (= 2b \cdot \sqrt[6]{75} \cdot \sqrt[10]{8 \cdot b^3})$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{6x^2} \cdot \sqrt[4]{72x^3} \cdot \sqrt{8x^3}}{\sqrt[3]{3x^2} \cdot \sqrt[4]{2x^2}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{2}{4}} =$

$2^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-\frac{2}{4}} = 2^{\frac{7}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{7}{4}} = 2x \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = 2x \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

$(= 2x \cdot \sqrt[6]{4 \cdot 27} \cdot \sqrt[4]{x^3} = 2x \cdot \sqrt[12]{4^2 \cdot 27^2 \cdot x^9})$

d) $\dfrac{\sqrt{6xy \cdot \sqrt[3]{xy^2} \cdot \sqrt{6x^3y}}}{\sqrt[12]{6xy} \cdot \sqrt[6]{6x^2}} = 6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{2}{6}} \cdot y^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{12}} =$

$6^{\frac{1}{2}} \cdot x^1 \cdot y^1 = xy \cdot \sqrt{6}$

2. a) $2 \cdot x^3 + 4 \cdot 5 = 6 \iff 2 \cdot x^3 = -14 \iff x^3 = -7 \iff x = -\sqrt[3]{7}$

b) $2 \cdot \sqrt[3]{x} - 4 = 6 \iff 2 \cdot \sqrt[3]{x} = 10 \iff \sqrt[3]{x} = 5 \iff x = 5^3 = 125$

c) $2 \cdot (3 - x^4) + 5 = 6 \iff (3 - x^4) = \dfrac{1}{2} \iff x^4 = \dfrac{5}{2} \iff x_{1/2} = \pm \sqrt[4]{\dfrac{5}{2}} = \pm \sqrt[4]{\dfrac{5 \cdot 8}{2 \cdot 8}} = \pm \dfrac{\sqrt[4]{40}}{2}$

d) $2 \cdot (3 - \sqrt[3]{x^2}) + 5 = 6 \iff 3 - \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{1}{2} \iff \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{5}{2} \iff x^2 = \dfrac{125}{8} \iff$

$x_{1/2} = \pm \sqrt{\dfrac{125}{8}} = \pm \dfrac{5}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \pm \dfrac{5 \cdot \sqrt{10}}{4}$

e) $\dfrac{36}{x^5} = \dfrac{x}{48} \iff 36 \cdot 48 = x^6 \iff x_{1/2} = \pm \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 3} = \pm 2 \cdot \sqrt[6]{3^3} = \pm 2 \cdot \sqrt{3}$

f) $\dfrac{18}{x^3} = -\dfrac{x^2}{27} \iff -18 \cdot 27 = x^5 \iff x = -\sqrt[5]{2 \cdot 3^2 \cdot 3^3} = -3 \cdot \sqrt[5]{2}$

g) $x^8 - 2x^4 = 8 \iff$ (Substitution $x^4 = u$) $u^2 - 2u - 8 = 0 \iff (u-4) \cdot (u+2) = 0 \iff$
$u_1 = 4$; $(u_2 = -2)$ d.h. $x^4 = 4 \iff x_{1/2} = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt{2}$

h) $\sqrt[3]{x} + 4 = \sqrt[6]{x} \iff$ (Subst. $\sqrt[6]{x} = u$) $u^2 - u + 4 = 0$
wegen $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$ keine Lösung!

i) $x^3 + \frac{16}{x^3} = 8 \Leftrightarrow x^6 - 8x^3 + 16 = 0$ (Subst.: $x^3 = u$) $u^2 - 8u + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$(u-4)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 4 \Leftrightarrow x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$

k) $\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow$ (Subst.: $u = \sqrt[3]{x}$) $u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$(u-2)\cdot(u-1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 2;\ u_2 = 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt[3]{x} = 2 \Rightarrow x_1 = 2^3 = 8$ und $\sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

l) $x^4 + \frac{4}{x^4} = 5 \Leftrightarrow x^8 - 5x^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow$ (Subst.: $x^4 = u$) $u^2 - 5u + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(u-1)\cdot(u-4) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1;\ u_2 = 4 \Leftrightarrow$

$x^4 = 1$ also $x_{1/2} = \pm 1$ und $x^4 = 4$ also $x_{3/4} = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2}$

m) $\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow$ (Subst.: $\sqrt[3]{x} = u$) $u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$(u-2)\cdot(u+1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 2;\ (u_2 = -1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$

3. (1) $m = 3a$ (2) $m + 3 = p$ (3) $m = p - a + 12$ (4) $p + m + a + b = 121$

Löse zunächst die Gleichungen (1), (2) und (3): Setze (1) in (2) und (3) ein:

(2) $3a + 3 = p$ (3) $3a = p - a + 12$ Setze (2) in (3) ein:

(3) $3a = 3a + 3 - a + 12 \Rightarrow a = 15$

(2) $3\cdot 15 + 3 = p$ also $p = 48$ und (1) $m = 3a = 3\cdot 15 = 45$

(4) $p + m + a + b = 121 \Rightarrow 48 + 45 + 15 + b = 121 \Rightarrow b = 13$

Anna ist mit 15 Jahren also um 2 Jahre älter als ihr Bruder Bernd mit 13 Jahren.

4. a) Parabel: $f(x) = 0{,}5\cdot(x-1)^2 + 1$

Blaue Gerade: $g_1(x) = 1{,}5\cdot x - 3$

Violette Gerade: $g_2(x) = 2{,}5\cdot x - 3$

b) $f(x) = g(x)$ muss genau eine Lösung haben: $0{,}5\cdot(x-1)^2 + 1 = mx - 3 \Leftrightarrow$

$0{,}5x^2 - x + 0{,}5 + 1 = mx - 3 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 - (1+m)\cdot x + 4{,}5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot(1+m)\cdot x + 9 = 0$

$x^2 - 2\cdot(1+m)\cdot x + 9 = 0$ hat genau eine Lösung falls gilt: $4\cdot(1+m)^2 - 4\cdot 9 = 0 \Leftrightarrow$

$4\cdot[(1+m)^2 - 9] = 0 \Leftrightarrow (1+m)^2 = 9 \Leftrightarrow 1 + m = \pm 3 \Leftrightarrow m_1 = 2;\ m_2 = -4$

Für die Gerade $y = 2x - 3$ lautet der Berührpunkt $(3; 3)$,

für die Gerade $y = -4x - 3$ lautet der Berührpunkt $(-3; 9)$