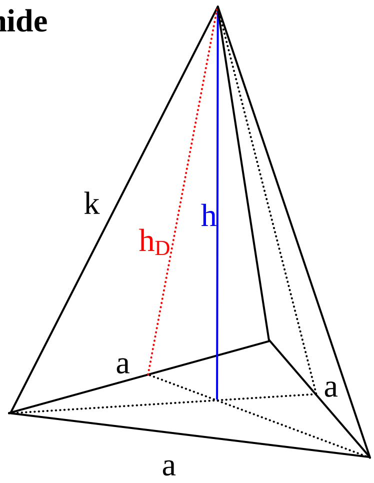
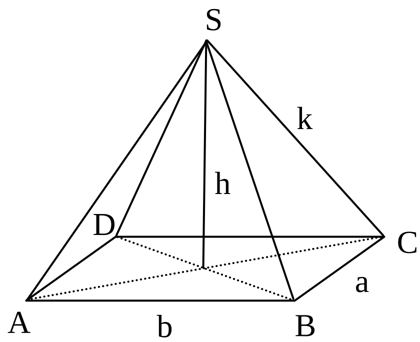
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zur Pyramide

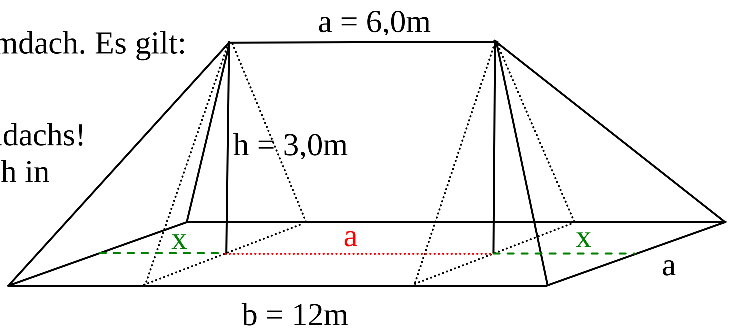
1. Eine gerade Pyramide besitzt als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 3{,}0\text{cm}$. Die Höhe der Pyramide beträgt $h = 2a = 6{,}0\text{cm}$.
    a) Zeichne sauber ein maßstabsgetreues Netz der Pyramide.
    b) Berechne die Kantenlänge k und die Länge der Höhe h_D in einem Seitendreieck.
    c) Berechne Volumen und Oberflächeninhalt der Pyramide.



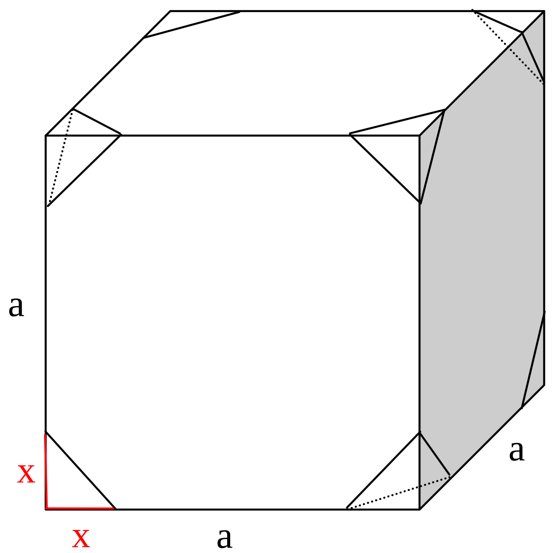
2. Eine gerade Pyramide besitzt als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 2{,}0\text{cm}$ und $b = 4{,}0\text{cm}$. Die Spitze der Pyramide befindet sich in einem Abstand $h = 3{,}0\text{cm}$ über der Grundfläche.
    a) Zeichne das Dreieck DBS in wahrer Größe!
    b) Sind die Dreiecke DBS und ACS kongruent zueinander? (Begründung!)
    c) Zeichne die Dreiecke ABS und BCS in wahrer Größe!
    d) Berechne die Kantenlänge k.
    e) Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke ABS und BCS.
    f) Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen der Pyramide.



3. Das Bild zeigt ein so genanntes Walmdach. Es gilt: $a = 6{,}0\text{m}$, $b = 12\text{m}$, $h = 3{,}0\text{m}$
    a) Berechne das Volumen des Walmdachs! Hinweis: Man kann das Walmdach in zwei kongruente Pyramiden und ein Prisma zerlegen.
    b) Berechne den Oberflächeninhalt des Dachs (ohne Grundfläche).

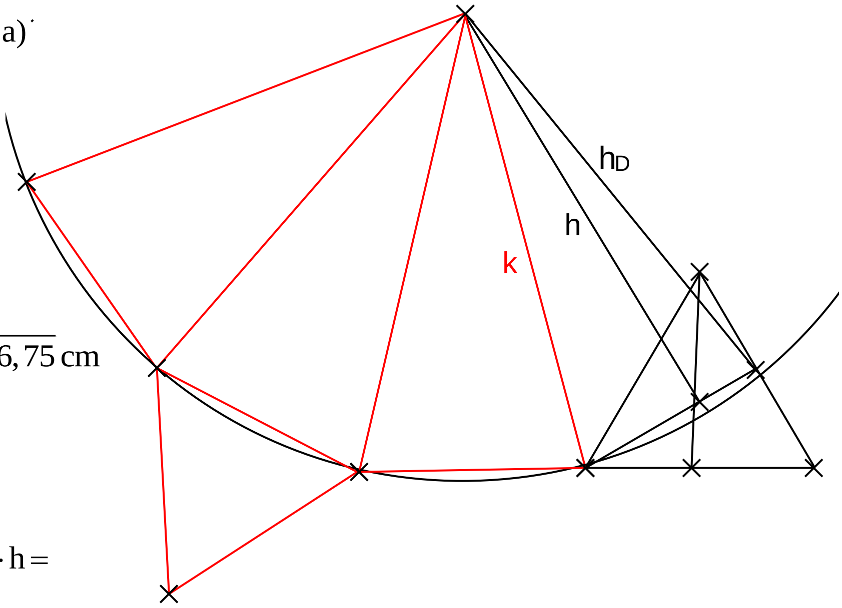


4. Schneidet man von einem Würfel mit der Kantenlänge a regelmäßige Tetraeder mit drei Kantenlängen x ab, so entsteht ein neuer, sehr symmetrischer Körper.
    a) Berechne den Oberflächeninhalt des Körpers in der Einheit a^2, wenn $x = 0{,}2a$ gilt.
    b) Berechne das Volumen des Körpers in der Einheit a^3, wenn $x = 0{,}2a$ gilt.
    c) Zeichne ein sauberes Schrägbild des Körpers, falls $x = 0{,}5a$ gilt. Wie groß ist nun der Oberflächeninhalt?



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zur Pyramide * Lösungen

a)



1. b) $k^2 = h^2 + x^2$ mit

$x = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

also

$k = \sqrt{6^2+3}\,cm = \sqrt{39}\,cm$

$h_D{}^2 + (\frac{a}{2})^2 = k^2 \Rightarrow$

$h_D = \sqrt{39-1{,}5^2}\,cm = \sqrt{36{,}75}\,cm$

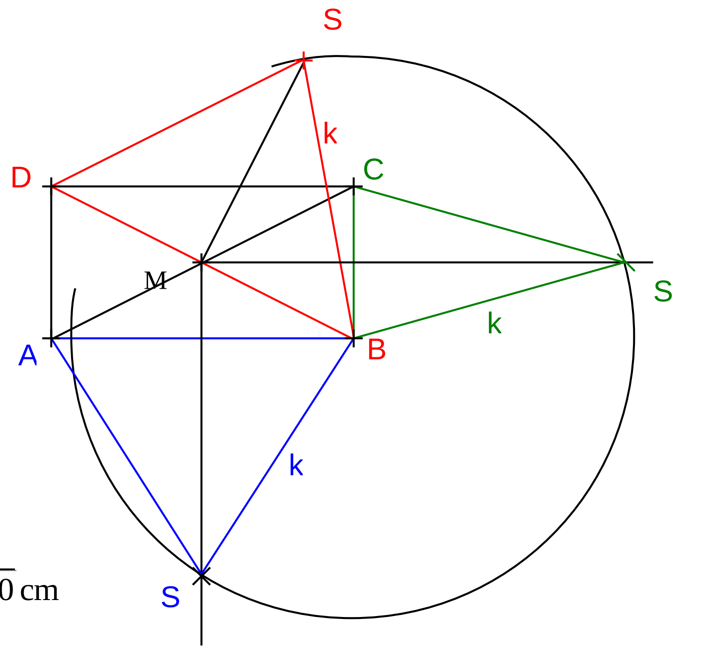
$h_D = \frac{\sqrt{147}}{2}\,cm$

c) $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot h =$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}3\cdot 3\,cm^3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}cm^3$ und

$A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_D = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}3\,cm^2 + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{147}}{2}cm^2 = \frac{9\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{147})}{4}cm^2$

2. a) c) siehe Bild!



b) $\Delta DBS \cong \Delta ACS$ nach SSS–Satz,

denn $\overline{DB} = \overline{AC}$ und

$\overline{DS} = k = \overline{AS}$ und $\overline{BS} = k = \overline{CS}$

d) $k^2 = \overline{DM}^2 + h^2$ und

$\left(2\cdot\overline{DM}\right)^2 = a^2 + b^2$

und daher

$\overline{DM} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+16}\,cm = \sqrt{5}\,cm$

$k = \sqrt{5+9}\,cm = \sqrt{14}\,cm$

e) Höhe h_1 im ΔABS:

$h_1 = \sqrt{k^2 - (\frac{b}{2})^2} = \sqrt{14-4}\,cm = \sqrt{10}\,cm$

Höhe h_2 im ΔBCS:

$h_2 = \sqrt{k^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{14-1}\,cm = \sqrt{13}\,cm$

$A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_1 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{10}\,cm^2 = 2\sqrt{10}\,cm^2$

$A_{\Delta BCS} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{13}\,cm^2 = \sqrt{13}\,cm^2$

f) $A_{Pyramide} = 2\cdot A_{\Delta ABS} + 2\cdot A_{\Delta BCS} + a\cdot b = 4\sqrt{10}\,cm^2 + 2\sqrt{13}\,cm^2 + 8\,cm^2$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot a\cdot b\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 4\cdot 3\,cm^3 = 8\,cm^3$

3. a) $x = \frac{1}{2} \cdot (b - a) = 3{,}0\,m$;

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \cdot a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3\,m^3 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6\,m^3 = 36\,m^3 + 54\,m^3 = 90\,m^3$$

b) Die Dachfläche besteht aus 2 Trapezflächen und 2 Dreiecksflächen:

$$A_{Trapez} = \frac{a+b}{2} \cdot h_1 \quad \text{mit} \quad h_1^{\,2} = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{also} \quad h_1 = \sqrt{9+9}\,m = 3\sqrt{2}\,m$$

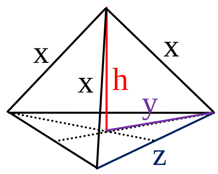
$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2 \quad \text{mit} \quad h_2^{\,2} = h^2 + x^2 \quad \text{also} \quad h_2 = \sqrt{9+9}\,m = 3\sqrt{2}\,m$$

$$A_{Dach} = 2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2 = (6+12) \cdot 3\sqrt{2}\,m^2 + 6 \cdot 3\sqrt{2}\,m^2 = 72\sqrt{2}\,m^2 \approx 102\,m^2$$

4. a) $A = 6 \cdot a^2 - 8 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right) + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\,x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}\,x\right) =$

$6 \cdot a^2 - 12 \cdot (0{,}2a)^2 + 4\sqrt{3} \cdot (0{,}2a)^2 = (5{,}52 + 0{,}16 \cdot \sqrt{3})\,a^2 =$

$5{,}797\ldots a^2 \approx 5{,}80\,a^2$



b) $z = \sqrt{2}\,x$ und $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} z = \frac{\sqrt{6}}{3} x$

$$h^2 = x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{x^2 - \frac{6}{9} x^2} = \sqrt{\frac{3}{9} x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} z\right) \cdot h = a^3 - \frac{2}{3} z^2 \cdot h = a^3 - \frac{2}{3} \cdot 2x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} x = a^3 - \frac{4\sqrt{3}}{9} x^3 =$$

$$a^3 - \frac{4\sqrt{3}}{9} (0{,}2a)^3 = a^3 - \frac{4\sqrt{3}}{9 \cdot 125} a^3 = \left(1 - \frac{4\sqrt{3}}{1125}\right) a^3 \approx 0{,}994\,a^3$$

c)