Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Quadratische Funktionen und Lineare Gleichungssysteme

1. a) Gesucht sind drei natürliche Zahlen.
   Die Summe der drei Zahlen beträgt 2012, die größte der drei Zahlen ist um 200 größer als die Summe der beiden anderen und die Differenz der beiden kleineren Zahlen beträgt 306.
   Bestimme die drei Zahlen!

   b) Die drei Brüder Anton, Bernd und Claus sammeln Briefmarken.
   Anton hat 90 Briefmarken mehr als Bernd. Claus hat 930 Briefmarken weniger als Anton und Bernd zusammen. Anton fehlen 45 Briefmarken, um genau die Hälfte der Briefmarken von Bernd und Claus zu besitzen.
   Wie viele Briefmarken haben die Brüder zusammen?

   c) Das Geburtsdatum T.M.J (Tag-Monat-Jahr) von Ernst Mach soll „berechnet“ werden.
   Das 48-fache der Summe aus M und dem Doppelten von T ergibt 14 weniger als J.
   Das 8-fache der Summe aus T und M entspricht genau dem 10-fachen der Differenz von T und M. Das 102-fache von T entspricht genau der Differenz von J und M.

2. Finde jeweils die Funktionsgleichung der Parabel, die durch die drei Punkte A, B und C verläuft. Gib die Funktionsgleichung auch in der Scheitelform an!

   a) A(-2/-1), B(0/-1), C(1/2) b) A(-2/-3), B(1/1,5), C(2/5)

   c) A(-1/-1), B(0/5), C(4/-11) d) A(1/25), B(3/1), C(4/-5)

3. Bestimme die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden.

   a) $f(x) = 0,4x^2 - 0,8x + 2,4$ und $g(x) = 2x$

   b) $f(x) = -0,5(x+1)^2 + 4$ und $g(x) = -2x + 2$

   c) $f(x) = 2(x+1)\cdot(x-3)$ und $g(x) = -6x - 2$

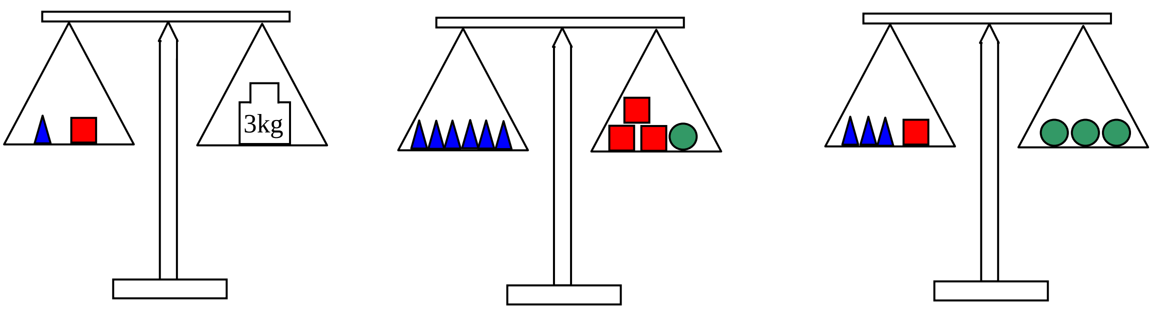
4. Bestimme m, t bzw. b so, dass sich die Parabel und die Gerade berühren, das heißt nur genau einen gemeinsamen Punkt haben. Bestimme auch den Berührpunkt!

   a) $f(x) = 0,25x^2 + x - 2$ und $g(x) = m\cdot x - 3$

   b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ und $g(x) = -2x + t$

   c) $f(x) = x^2 + bx + 1$ und $g(x) = -x - 3$

5. Bestimme die Masse eines roten Würfels, einer grünen Kugel und einer blauen Pyramide.



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Quadratische Funktionen und Lineare Gleichungssysteme Lösungen

1. a) (1) $a+b+c=2012$; (2) $a+b+200=c$; (3) $b-a=306 \Rightarrow$
$a=300$; $b=606$; $c=1106$

b) (1) $a=b+90$; (2) $c+930=a+b$; (3) $a+45=\frac{1}{2}\cdot(b+c) \Rightarrow$
$a=1200$; $b=1110$; $c=1380$

c) (1) $48\cdot(M+2T)=J-14$; (2) $8\cdot(T+M)=10\cdot(T-M)$; (3) $102\cdot T=J-M \Rightarrow$
$T=18$; $M=2$; $J=1838$ also Geburtsdatum 18.02.1838

2. Setze jeweils in den allgemeinen Ansatz $f(x)=ax^2+bx+c$ für die Parabel die drei Punkte A, B und C ein.

a) (1) $-1=4a-2b+c$ (1) $0=4a-2b \Rightarrow b=2a$
(2) $-1=0+0+c \Rightarrow c=-1$
(3) $2=a+b+c$ (3) $3=a+b \Rightarrow b=3-a$
$\Rightarrow 2a=3-a \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=1,\ b=2$
$f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

b) (1) $-3=4a-2b+c$ (1) $-4,5=3a-3b \Rightarrow b=a+1,5$
(2) $1,5=a+b+c \Rightarrow c=1,5-a-b$
(3) $5=4a+2b+c$ (3) $3,5=3a+b$
$\Rightarrow 3,5=3a+a+1,5 \Rightarrow a=0,5$ und $b=2$ und $c=-1$
$f(x)=0,5x^2+2x-1=0,5\cdot(x+2)^2-3$

c) (1) $-1=a-b+c$ (1) $-6=a-b \Rightarrow b=a+6$
(2) $5=0+0+c \Rightarrow c=5$
(3) $-11=16a+4b+c$ (3) $-16=16a+4b \Rightarrow -4=4a+b$
$\Rightarrow -4=4a+a+6 \Rightarrow a=-2$ und $b=4$ und $c=5$
$f(x)=-2x^2+4x+5=-2\cdot(x-1)^2+7$

d) (1) $25=a+b+c \Rightarrow c=25-a-b$
(2) $1=9a+3b+c$ (2) $-24=8a+2b \Rightarrow b=-12-4a$
(3) $-5=16a+4b+c$ (3) $-30=15a+3b \Rightarrow b=-10-5a$
$\Rightarrow 12+4a=10+5a \Rightarrow a=2$ und $b=-20$ und $c=43$
$f(x)=2x^2-20x+43=2\cdot(x-5)^2-7$

3. a) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 0,4x^2-0,8x+2,4=2x \Leftrightarrow 0,4x^2-2,8x+2,4=0 \Leftrightarrow$
$x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-6)=0 \Leftrightarrow x_1=1$; $x_2=6$ also $S_1(1/2)$ und $S_2(6/12)$

b) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -0,5x^2-x+3,5=-2x+2 \Leftrightarrow -0,5x^2+x+1,5=0 \Leftrightarrow$
$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow x_1=3$; $x_2=-1$ also $S_1(3/-4)$; $S_2(-1/4)$

c) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=-6x-2 \Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow$
$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-1)=0 \Leftrightarrow x_1=-2$; $x_2=1$ also $S_1(-2/10)$; $S_2(1/-8)$

4. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0{,}25x^2 + x - 2 = m \cdot x - 3 \Leftrightarrow 0{,}25x^2 + (1-m) \cdot x + 1 = 0$

Diese Gleichung hat dann genau eine Lösung, wenn $D = 0$ gilt:

$D = (1-m)^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 1 = (1-m)^2 - 1$ also $D = 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 = 1 \Leftrightarrow 1 - m = \pm 1$

$m_1 = 0$ und $m_2 = 2$

1. Fall $m_1 = 0$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0{,}25x^2 + (1-0) \cdot x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ und $f(-2) = g(-2) = -3$

Im Fall $m_1 = 0$ berühren sich Gerade und Parabel also im Punkt B(-2/-3).

2. Fall $m_1 = 2$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0{,}25x^2 + (1-2) \cdot x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ und $f(2) = g(2) = 1$

Im Fall $m_1 = 2$ berühren sich Gerade und Parabel also im Punkt B(2/1).

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 3 = -2x + t \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + (t+3) = 0$

$D = 4^2 - 4 \cdot (t+3) \cdot 1 = 16 - 4t - 12 = 4 - 4t$ also $D = 0 \Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$0 = x^2 - 4x + (1+3) = 0 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 0 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x = 2$

und f(2) = g(2) = -3, d.h. der Berührpunkt lautet B(2/-3).

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + bx + 1 = -x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (b+1)x + 4 = 0$

$D = (b+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = (b+1)^2 - 16$ und damit $D = 0 \Leftrightarrow (b+1)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$b + 1 = \pm 4 \Leftrightarrow b_1 = 3 \ ; \ b_2 = -5$

1. Fall $b_1 = 3$

$x^2 + (3+1)x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

und f(-2) = g(-2) = -1, d.h. der Berührpunkt lautet B(-2/-1).

2. Fall $b_2 = -5$

$x^2 + (-5+1)x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

und f(2) = g(2) = -5, d.h. der Berührpunkt lautet B(2/-5).

5. Für die gesuchten Massen führen wir Variable ein:

p =  und w =  und k =  und die drei Gleichgewichtsbedingungen lauten dann:

(1) $p + w = 3kg$

(2) $6p = 3w + k \Rightarrow k = 6p - 3w$

(3) $3p + w = 3k$ (3) $3p + w = 18p - 9w \Rightarrow 10w = 15p \Rightarrow w = 1{,}5p$

in (1) $p + w = 3kg \Rightarrow p + 1{,}5p = 3kg \Rightarrow p = \dfrac{3kg}{2{,}5} = 1{,}2kg$

$w = 1{,}5p = 1{,}5 \cdot 1{,}2kg = 1{,}8kg$ und $k = 6p - 3w = 6 \cdot 1{,}2kg - 3 \cdot 1{,}8kg = 1{,}8kg$

Die gesuchten Massen betragen für die Pyramide 1,2 kg und für den Würfel und die Kugel jeweils 1,8 kg.