

Mathematik * Jahrgangsstufe 9

Das Heron-Verfahren zur Ermittlung der Quadratwurzel von a

Wie berechnet man möglichst schnell die Wurzel einer Zahl $a > 0$?

Nehmen wir den Fall $a = 10$.

Wie bestimmt der Taschenrechner den Wert $\sqrt{10} \approx 3,16227766... ?$

Auch ohne Taschenrechner sieht man sofort

$$3 < \sqrt{10} < 4, \text{ denn } 3^2 = 9 < 10 < 16 = 4^2$$

Durch geeignetes Suchen und Rechnen findet man die nächste Dezimalstelle von $\sqrt{10}$

$$3,1 < \sqrt{10} < 3,2, \text{ denn } 3,1^2 = 9,61 < 10 < 10,24 = 3,2^2$$

Um die nächste Dezimalstelle von $\sqrt{10}$ zu finden, muss man sich schon mehr anstrengen.

$$3,16 < \sqrt{10} < 3,17, \text{ denn } 3,16^2 = 9,9856 < 10 < 10,0489 = 3,17^2$$

Einen wesentlich schnelleren und effektiveren Weg zum Ermitteln der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{10} = 3,16227766...$ liefert das so genannte Verfahren von Heron.

Die Idee für diese Berechnung von Quadratwurzeln ist schon sehr alt und wird nach dem griechischen Mathematiker und Ingenieur **Heron von Alexandria** (1. Jh. N. Chr.) benannt. Das **Heron-Verfahren** war aber schon 2000 Jahre früher den Babyloniern bekannt.

Wir beginnen mit einer natürlichen Zahl x_1 , die in der Nähe der Quadratwurzel \sqrt{a} liegt und berechnen anschließend der Reihe nach immer nach dem gleichen Schema Brüche, die sich der gesuchten Wurzel immer genauer annähern.

Wähle eine natürliche Zahl $x_1 \approx \sqrt{a}$ und berechne dann

$$x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) : 2 \quad \text{und dann} \quad x_3 = \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right) : 2 \quad \text{und dann} \quad x_4 = \left(x_3 + \frac{a}{x_3} \right) : 2 \quad \text{usw.}$$

Wenn wir z.B. $\sqrt{10}$ berechnen wollen, so beginnen wir z.B. mit $x_1 = 3$

$$x_2 = \left(x_1 + \frac{10}{x_1} \right) : 2 = \left(3 + \frac{10}{3} \right) : 2 = \frac{9+10}{3 \cdot 2} = \frac{19}{6} \approx 3,16666666...$$

$$x_3 = \left(x_2 + \frac{10}{x_2} \right) : 2 = \left(\frac{19}{6} + \frac{10}{\frac{19}{6}} \right) : 2 = \frac{19 \cdot 19 + 10 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 19 \cdot 2} = \frac{721}{228} \approx 3,162280702...$$

$$x_4 = \left(x_3 + \frac{10}{x_3} \right) : 2 = \left(\frac{721}{228} + \frac{10}{\frac{721}{228}} \right) : 2 = \frac{721 \cdot 721 + 10 \cdot 228 \cdot 228}{228 \cdot 721 \cdot 2} = \frac{1039681}{328776} \approx 3,16227766....$$

Der Vergleich mit dem Taschenrechnerwert $\sqrt{10} = 3,16227766....$ zeigt, dass das Heron-Verfahren sehr schnell gute Näherungswerte für die Quadratwurzel liefert.

Graphische Veranschaulichung des Heron-Verfahrens am Beispiel $\sqrt{6}$

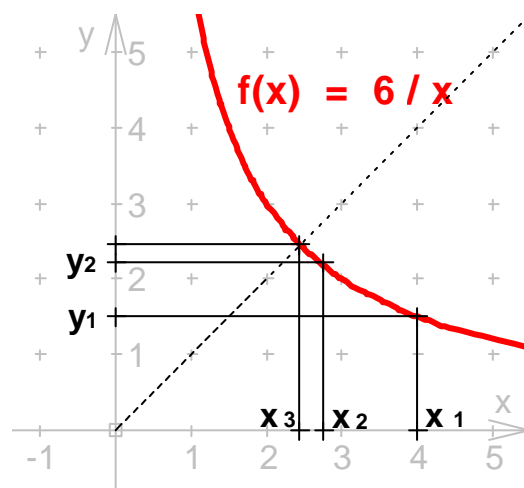
Im Bild wird veranschaulicht, wie man mit dem Heron-Verfahren die Wurzel von $a = 6$ berechnet.

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{x}$

[bei uns also $f(x) = \frac{6}{x}$]

wird von der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten genau im Punkt $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$ geschnitten, denn

$$f(\sqrt{6}) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$



Die Parallelen zu den beiden Achsen vom Punkt $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$ aus bilden zusammen mit den Achsen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$.

Wir nähern uns dem noch unbekanntem Wert von $\sqrt{6}$, indem wir mit einem beliebigen Wert x_1 beginnen, z.B. $x_1 = 4$.

Wir berechnen $y_1 = f(x_1) = \frac{6}{x_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; nun gilt $x_1 \cdot y_1 = 6$ und ersichtlich ist x_1 größer als $\sqrt{6}$ und y_1 kleiner als $\sqrt{6}$.

Im Diagramm sehen wir ein Rechteck mit den Seiten x_1 und y_1 und dem Flächeninhalt 6.

Der gesuchte Wert für $\sqrt{6}$ liegt also zwischen y_1 und x_1 .

Deshalb bilden wir den Mittelwert von x_1 und y_1 und nennen ihn x_2 . Der Wert von x_2 liegt sicher dichter am Wert von $\sqrt{6}$ als der Wert von x_1 und es gilt:

$$x_2 = (x_1 + y_1) : 2 = \left(x_1 + \frac{6}{x_1} \right) : 2 = \dots = \frac{11}{4} = 2,75. \quad \left(y_2 = \frac{6}{x_2} = \frac{6 \cdot 4}{11} = \frac{24}{11} = 2,1818\dots \right)$$

Also gilt nun $y_2 = 2,1818\dots < \sqrt{6} < 2,75 = x_2$. Wir sind aber noch nicht zufrieden!

Wieder bilden wir den Mittelwert von x_2 und y_2 und erhalten einen besseren Wert x_3 .

$$x_3 = \left(x_2 + \frac{6}{x_2} \right) : 2 = \dots = \frac{217}{88} = 2,4659\dots$$

Wenn wir die Rechenschritte wiederholen, dann kommen wir dem Wert von $\sqrt{6}$ immer näher.

$$x_4 = \left(x_3 + \frac{6}{x_3} \right) : 2 = \dots = \frac{93553}{38192} = 2,4495\dots \text{ und}$$

$$x_5 = \left(x_4 + \frac{6}{x_4} \right) : 2 = \dots = \frac{17503936993}{7145952352} \approx 2,449489743 \quad (\text{vgl. } \sqrt{6} \approx 2,449489743)$$

Schon nach 5 Schritten haben wir mit diesem **Iterationsverfahren** $\sqrt{6}$ sehr genau bestimmt.

Aufgabe:

Berechne nach dem Heron-Verfahren $\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$ und $\sqrt{3}$ und vergleiche mit dem TR-Wert!